Seminar zur Vorlesung
Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 9** **14.06.2017**

Aufgabe 19 *Harmonischer Oszillator*

Wir definieren die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ durch

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{M\Omega}\,\hat{p} \right) = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{d}{dx} \right)$$

und

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{M\Omega}\,\hat{p} \right) = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{d}{dx} \right) .$$

Mit Hilfe dieser Operatoren wollen wir im Folgenden die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators bestimmen.

a) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ und zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}\,\hat{x}^2$$

in der Form

$$\hat{H} = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

geschrieben werden kann. (1 Punkt)

Statt direkt die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator $\hat{H}$ zu berechnen, lösen wir die Eigenwertgleichung

$$\hat{N} u_n(x) = \lambda_n u_n(x)\,, \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}\,.$$

Daraus folgt dann unmittelbar

$$\hat{H} u_n(x) = \hbar\Omega \left(\lambda_n + \frac{1}{2} \right) u_n(x)\,.$$

b) $u(x)$ sei eine normierte Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert λ, d. h. es gilt $\hat{N}u(x) = \lambda u(x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} \hat{N}\,\hat{a}^\dagger\,u(x) &= (\lambda+1)\,\hat{a}^\dagger\,u(x)\,, \\ \hat{N}\,\hat{a}\,u(x) &= (\lambda-1)\,\hat{a}\,u(x) \end{aligned}$$

gilt, d. h. $\hat{a}^\dagger\,u(x)$ ist Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert $\lambda + 1$, während $\hat{a}\,u(x)$ Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert $\lambda - 1$ ist. Berechnen Sie außerdem die beiden

Normierungsintegrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{a}^\dagger u(x)\right]^* \left[\hat{a}^\dagger u(x)\right] dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{a} u(x)\right]^* \left[\hat{a} u(x)\right] dx$$

und zeigen Sie, dass $\lambda \geq 0$ gelten muss. (1 Punkt)

c) Wegen $\lambda \geq 0$ lässt sich durch mehrmaliges Anwenden von $\hat{a}$ auf $u(x)$ immer eine Eigenfunktion $v(x)$ von $\hat{N}$ zu einem Eigenwert μ mit $0 \leq \mu < 1$ konstruieren. Zeigen Sie, dass $\hat{a}\, v(x) = 0$ gelten muss, da man sonst Eigenfunktionen von $\hat{N}$ zu negativen Eigenwerten konstruieren kann. Was folgt daraus für die möglichen Eigenwerte von $\hat{N}$? Wie sehen die zugehörigen normierten Eigenfunktionen $u_n(x)$ aus? (1 Punkt)

Ergebnis: $u_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n u_0(x)$

d) Zeigen Sie, dass für beliebige differenzierbare Funktionen $f(x)$ die Beziehung

$$\hat{a}^\dagger f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\kappa}\, e^{\kappa^2 x^2/2} \frac{d}{dx}\, e^{-\kappa^2 x^2/2} f(x)\,, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}$$

gilt. Was gilt dann für $\left(\hat{a}^\dagger\right)^n f(x)$? (1 Punkt)

e) Bestimmen Sie den normierten Grundzustand $u_0(x)$ aus $\hat{a}\, u_0(x) = 0$ und berechnen Sie mit Hilfe von d) die Eigenfunktionen $u_n(x)$. Bringen Sie Ihr Ergbenis auf die Form

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!}}\, H_n(\kappa x)\, e^{-\kappa^2 x^2/2}\,, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 20 *Kohärente Zustände I*

Die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus Aufgabe 19 sind nicht hermitesch und haben daher nicht notwendigerweise reelle Eigenwerte.

a) Lösen Sie die Eigenwertgleichung

$$\hat{a}\, \psi_\alpha(x) = \alpha\, \psi_\alpha(x)\,.$$

Für welche Eigenwerte α sind die Eigenfunktionen normierbar? Bestimmen Sie die zugehörige Normierungskonstante. (1 Punkt)

b) Bringen Sie Ihre Lösung auf die Form der Wellenfunktionen aus Aufgabe 14 und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{a}^\dagger$ keine normierbaren Eigenfunktionen hat. (1 Punkt)