Formelsammlung:
Physik I für Naturwissenschaftler

Stand: 12. Februar 2014

1 Was ist Physik?

- Physikalische Größe $\qquad X = \text{Zahl} \cdot \underset{\text{Einheit}}{[X]}$

- SI-Basiseinheiten (Mechanik)

Zeit	$[t] = 1\,\mathrm{s}$
Länge	$[x] = 1\,\mathrm{m}$
Masse	$[m] = 1\,\mathrm{kg}$

2 Mechanik

2.1 Kinematik in 1D

bekannt	**gesucht**	**Operation**	
Bahn $x(t)$	Geschwindigkeit	differenzieren	$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
	Beschleunigung	differenzieren	$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$
Geschwindigkeit $v(t)$	Bahn	integrieren	$x(t) = \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' + x_0$
	Beschleunigung	differenzieren	$a(t) = \dot{v}(t)$
Beschleunigung $a(t)$	Geschwindigkeit	integrieren	$v(t) = \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t' + v_0$
	Bahn	integrieren	$x(t) = \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' + x_0$

x_0 : Anfangsort
v_0 : Anfangsgeschwindigkeit

$\rightarrow$ vollständige Information über 1D-Bahn: $a(t),\ x_0,\ v_0$!

Beispiel: Bahn bei $a = \text{const.}$ $\qquad x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$

2.2 Kinematik in 2D

- Ortsvektoren (angeheftet an Koordinatenursprung!) $\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix}$

- Momentangeschwindigkeit (Tangente an Bahn) $\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{x}}\,(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}\,(t) \\ \dot{y}\,(t) \end{pmatrix}$

  Bahngeschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

- Beschleunigung $\vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{x}}\,(t) = \dot{\vec{v}}\,(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}\,(t) \\ \ddot{y}\,(t) \end{pmatrix}$

- **Beispiel 1:** Allgemeiner Wurf unter Abwurfwinkel φ mit Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

  Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0\,\cos(\varphi) \\ v_0\,\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

  Anfangsort $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Damit folgt für die Bahn $\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} v_0\,\cos\varphi \cdot t \\ v_0\,\sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$

  z.B. Wurfweite $x_{\mathrm{A}} = \dfrac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\varphi)$

- **Beispiel 2:** Gleichförmige Kreisbewegung mit Umlaufzeit T und Radius R

  Bahn $\vec{x}\,(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \end{pmatrix}$

  Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \text{const.}$ (gleichförmig!)

  Bahngeschwindigkeit $v = |\vec{v}| = \omega \cdot R = \text{const.}$

  Zentripetalbeschleunigung $a = |\vec{a}| = \omega^2 \cdot R = \dfrac{v^2}{R}$ (Betrag)

2.3 Dynamik

- **2. Newtonsches Axiom:** $m\,\ddot{\vec{x}}\,(t) = \sum_i \vec{F}_i$
  - Lineare Superposition aller am Massenpunkt m angreifenden Kräfte $\vec{F}_i$, $[F] = 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$
  - Mit Anfangsort $\vec{x}(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(0)$ folgt damit die gesamte Bahn $\vec{x}(t)$ („Programm der Mechanik“)

- **Reibungskräfte (Beträge)**
  - proportional zur Normalkraft F_n
  - Maximale Haftreibungskraft $F_\mathrm{RH} = \mu_\mathrm{RH} \cdot F_\mathrm{n}$
  - Gleitreibungskraft $F_\mathrm{RG} = \mu_\mathrm{RG} \cdot F_\mathrm{n}$ $\mu_\mathrm{RG} < \mu_\mathrm{RH}$

- **Gravitationskraft** (Betrag) zwischen Massen m_1 und m_2 im Abstand r

$$F_G = G \cdot \frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

  wirkt anziehend entlang Verbindung der Massenpunkte mit Gravitationskonstante

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

- **Federkraft** (Hooke’sches Gesetz) $F(x) = kx$

  x: Dehnung/Stauchung der Feder
  k: Federkonstante

2.4 Arbeit und Energie

- **Arbeit** einer Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ auf dem Weg von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$

$$W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}\ , \qquad [W] = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{J(Joule)}$$

  Variante in 1D $$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x \qquad \big(\text{Fläche unter Kurve } F(x)\big)$$

- **Satz von der kinetischen Energie:**
  Arbeit $\leftrightarrow$ Bewegungsenergie für einen Massenpunkt m

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + W = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2$$

- **Energieerhaltungssatz:** Bei *konservativen* Kräften $\vec{F}$ wird

$$W = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2}$$

$E_{\text{pot},i}$: potentielle Energie des Punktes $\vec{x}_i$

Damit folgt der **Energieerhaltungssatz**

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + E_{\text{pot},1} = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2 + E_{\text{pot},2} = E_{\text{ges}} = \text{const.}$$

- **Beispiele zur potentiellen Energie:**
  - Schwerefeld $\quad E_{\text{pot}}(z) = mgz \quad$ z: vertikale Koordinate
  - Feder $\quad E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad$ x: Dehnung/Stauchung der Feder
  - Potentielle Energie im Gravitationsfeld der Masse M

  $$E_{\text{pot}}(r) = -G\frac{mM}{r} \qquad r\text{: Abstand von Masse } M$$

  Achtung: Referenzpunkt ist hier $r = \infty$

2.5 Impuls und Impulserhaltungssatz

- **Impuls** einer Masse m mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Wenn nur innere Kräfte (actio = reactio) zwischen den Massen m_i wirken, gilt der **Impulserhaltungssatz**

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i = \overrightarrow{\text{const.}}$$

- **Anwendung:** Zentraler elastischer Stoß zwischen den Massen m_1 und m_2

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

v_i: Anfangsgeschwindigkeit von Masse m_i **mit** Vorzeichen
v_i': Endgeschwindigkeit von Masse m_i **mit** Vorzeichen

2.6 Starrer Körper – Drehbewegungen

- **Translation** des Schwerpunkts $\vec{x}_S$

$$\vec{x}_S \equiv \frac{1}{m_{\text{ges}}} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

$\vec{x}_i$: Positionen der Massenpunkte m_i
$m_{\text{ges}} = \sum_i m_i$: Gesamtmasse

Dann lautet die **Bewegungsgleichung der Translation**

$$m_{\text{ges}}\,\ddot{\vec{x}}_S = \sum_i \vec{F}_i$$

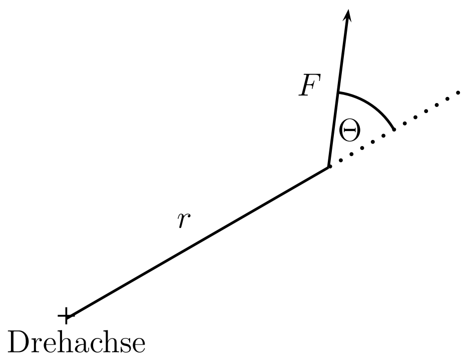
$\vec{F}_i$: äußere Kräfte

- **Kinematische Grundgrößen** der Rotation (um eine feste Drehachse)
  - „Bahn“ der Rotation = Winkel um Drehachse $\varphi(t)$
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$
  - Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$

- **Drehmoment** (skalare Formulierung)

$$M = rF \sin\Theta$$

F: angreifende Kraft unter Winkel Θ im Abstand r zur Drehachse („Ursache“ der Rotation)



- **Bewegungsgleichung der Rotation**

$$I\ddot{\varphi} = \sum_i M_i$$

$I = \sum_i m_i r_i^2$: **Trägheitsmoment** der Massen m_i im Abstand r_i zur Drehachse

M_i: angreifende Drehmomente

- **Satz von Steiner** zu Trägheitsmomenten

$$I = I_S + m_{\text{ges}} \cdot d^2$$

I_S: Trägheitsmoment um Schwerpunktsachse S
I: Trägheitsmoment um Achse parallel zu S im Abstand d

- **Drehimpuls** um eine Achse mit zugehörigem Trägheitsmoment I

$$L \equiv I\dot{\varphi} = I\omega$$

Damit wird die **Bewegungsgleichung der Rotation**

$$\dot{L} = \sum_i M_i$$

Wenn keine äußeren Drehmomente am starren Körper angreifen, gilt **Drehimpulserhaltung**

$$L = I\omega = \text{const.}$$

- **Kinetische Energie der Rotation** („Rotationsenergie“) um eine Achse

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Anwendung: **Rollen** eines Rades (auch Zylinder oder Kugel) mit Radius R und der Masse m_{ges} im Schwerefeld

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 + m_{\text{ges}} gh = \text{const.}$$

Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_S = \omega R$ (Rollbedingung)

- Gegenüberstellung von Translation und Rotation

Translation (1D)		**Rotation**	
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Geschwindigkeit	v	Winkelgeschwindigkeit	ω
Kraft	F	Drehmoment	M
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = I\omega$
Bewegungsgleichung	$\dot{p} = F$	Bewegungsgleichung	$\dot{L} = M$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2$

2.7 Schwingungen

- **Freie, ungedämpfte Schwingungen:** harmonischer Oszillator
  - Wichtig: linear rückstellende Kraft (z.B. Feder)

$$F = -kx$$

- Bewegungsgleichung (2. Newton'sches Axiom) für Masse m

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ergibt Schwingung (Bahn der Masse m)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$$

mit Amplitude A und Eigenfrequenz (Kreisfrequenz!)

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Periodendauer der Schwingung $T \equiv 2\pi/\omega_0$
- zugehörige Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

- **Mathematisches Pendel** (Massenpunkt) der Länge l

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

  - Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

- **Physikalisches Pendel** (starrer Körper, Masse m) mit Trägheitsmoment I_D um Drehachse im Abstand d vom Schwerpunkt

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

  - Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_D}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_S + md^2}}$

- **Freie, gedämpfte Schwingung**
  - Wichtig: lineare, rückstellende Kraft $F = -kx$ und Reibungskraft $F_\mathrm{R} \sim \dot{x}$
  - Bewegungsgleichung für Masse m

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

  - Exponentiell abklingende Schwingung

$$x(t) = A\, e^{-\kappa t} \cos(\omega t)$$

  mit Dämpfungskonstante κ und Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} < \omega_0$

- **Angetriebener Oszillator – Resonanz**
  - Äußere antreibende Kraft $F \sim \cos(\Omega t)$

– Bewegungsgleichung für Masse m

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = \text{const.} \cdot \cos(\Omega t)$$

wird gelöst von

$$x(t) = A(\Omega)\cos\left[\Omega t - \psi(\Omega)\right]$$

– Amplitude

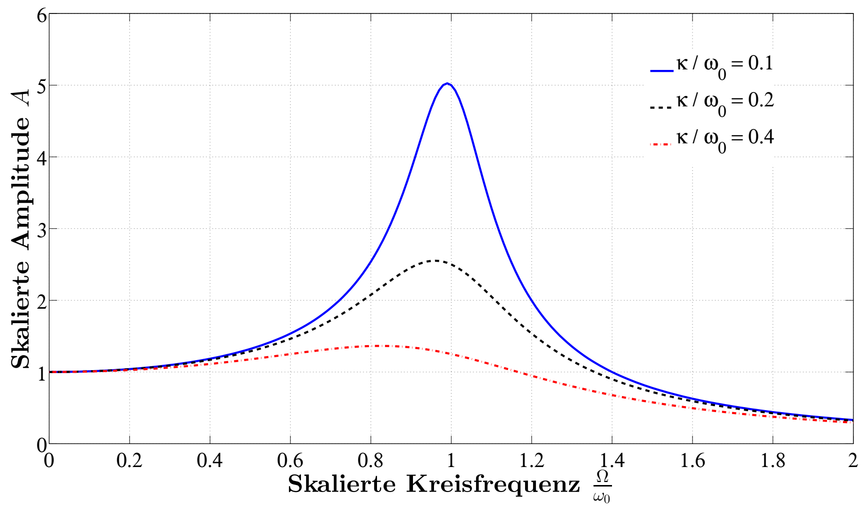
$$A(\Omega) \equiv \frac{\text{const.}}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}}$$

mit Resonanzfrequenz (Maximum)

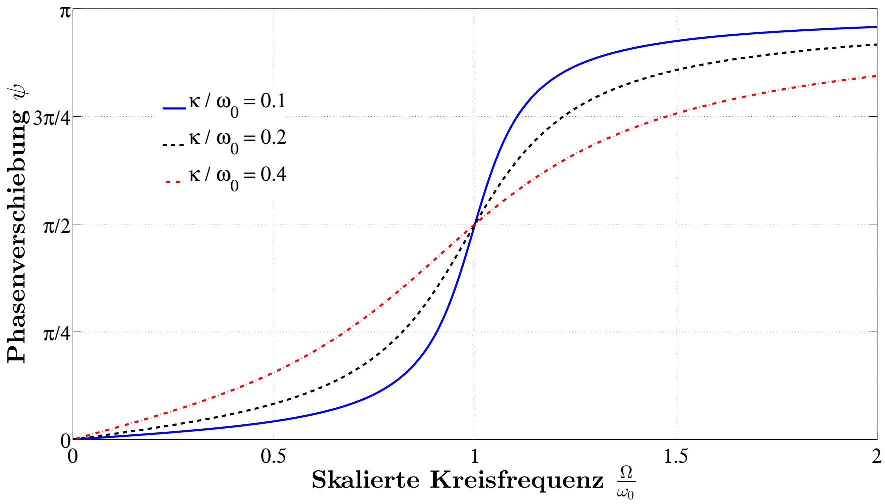
$$\Omega_{res} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}$$

– Phasenverschiebung (Oszillator „hinkt hinterher“)

$$\psi(\Omega) \equiv \arctan\frac{2\kappa\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



(a) Amplitude $A(\Omega)$ zeigt Resonanz



(b) Phasenverschiebung $\psi(\Omega)$

2.8 Mechanik fluider Medien (inkompressibel)

- **Grundgrößen**
  - **Druck**

$$p = \frac{F_\perp}{A}$$

    ausgeübt von der senkrechten Komponente $F_\perp$ einer Kraft $\vec{F}$ auf eine Fläche A mit den Einheiten

$$[p] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{Pa(Pascal)} = 10^{-5}\,\mathrm{bar}$$

  - **Dichte**

$$\rho = \frac{m}{V}$$

    eines Körpers mit der Masse m und dem Volumen V mit der Einheit

$$[\rho] = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

- **Hydrostatischer Druck**

$$p = p_0 + \rho g h$$

  in der Tiefe h bei äußerem Druck p_0

- **Kontinuitätsgleichung (Erhaltungsgesetz)**

$$Av = \mathrm{const.}$$

  bei laminarer, stationärer Strömung mit Geschwindigkeit v durch Querschnittsfläche A

- **Bernoulli-Gleichung**

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \mathrm{const.}$$

  bei Geschwindigkeit v und statischem Druck p in der Höhe y

- **Oberflächenspannung**

$$\sigma \equiv \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

  bei Vergrößerung ΔA einer Oberfläche und dazu notwendiger Arbeit ΔW.
  Einfache Messmethode über eine Kraft F zum Heben der Fluidlamelle mit Länge l ergibt

$$\sigma = \frac{F}{2l}$$

  Anwendung: Kapillare Steighöhe

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

  in einem Rohr mit Radius r (totale Benetzung)

3 Thermodynamik (Wärmelehre)

3.1 Thermodynamische Systeme

- Teilchenzahl $N \sim 10^{23}$
- Stoffmenge
$$n = \frac{N}{N_\mathrm{A}}\,, \quad [n] = 1\,\mathrm{mol}$$
mit Avogadro-Konstante
$$N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}$$
- Makroskopische Zustandsgrößen:
  - Druck p
  - Volumen V
  - Temperatur T (in Kelvin)

3.2 Temperatur

- Empirische Celsius-Temperatur θ_C in °C und Temperatur T in Kelvin
$$T = \left(\frac{\theta_\mathrm{C}}{{}^\circ\mathrm{C}} + 273{,}15\right)\mathrm{K}$$

3.3 Thermische Zustandsgleichungen

- **Ideales Gas**
$$pV = nRT = Nk_BT$$
mit allg. Gaskonstante $R = N_A\,k_B = 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$

  und Boltzmann-Konstante $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

- **Kinetische Theorie des idealen Gases: Grundgleichung**
$$p = \frac{N}{V}\frac{1}{3}\,m\,\langle v^2\rangle \qquad \text{mit} \qquad \langle v^2\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}v\,v^2\,f_M(v) = \frac{3k_BT}{m}$$
und der Maxwell-Verteilung
$$f_M(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)$$
m : Masse eines idealen Gasteilchens
N : Anzahl der Gasteilchen

- Mittlere thermische Energie eines Gasteilchens

$$\langle \epsilon \rangle = f \, \frac{1}{2} \, k_B \, T$$

f : Anzahl Freiheitsgrade
k_B : Boltzmann-Konstante mit $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Damit folgt die innere Energie eines idealen Gases, die sog. kalorische Zustandsgleichung

$$U = N \langle \epsilon \rangle = \frac{f}{2} \, nRT$$

3.4 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

- **Differentielle Form**

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$$

$\mathrm{d}U$: differentielle Änderung der **Zustandsgröße** innere Energie
δQ : differentielle Änderung der **Prozessgröße** Wärme
δW : differentielle Änderung der **Prozessgröße** Arbeit

z.B. **Volumenarbeit** $\delta W = -p \, \mathrm{d}V$

- **Molare, spezifische Wärmen C_m idealer Gase mit f Freiheitsgraden**
  - isochorer Prozess: $\mathrm{d}V = 0$

$$\delta Q|_V = n \cdot C_{\mathrm{m}V} \cdot \mathrm{d}T \qquad \text{mit} \qquad C_{\mathrm{m}V} = \frac{f}{2} \, R$$

  - isobarer Prozess: $\mathrm{d}p = 0$

$$\delta Q|_p = n \cdot C_{\mathrm{m}p} \cdot \mathrm{d}T \qquad \text{mit} \qquad C_{\mathrm{m}p} = \frac{f}{2} \, R + R$$