Klausur “Mathematik für Bachelor Biochemie und Molekulare Medizin II” SS 2010

1. Untersuchen Sie (12 P.)

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + xy$$

auf Extremwerte und Sattelpunkte.

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (10 P.)

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

3. Wir betrachten eine reelle Funktion $f(x, y)$, die mindestens zweimal differenzierbar ist. In einem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gilt: (5 P.)

$$f_x^0 = 0,\ f_y^0 = 0,\ f_{xx}^0 > 0,\ f_{yy}^0 < 0.$$

f_{xy}^0 existiert. Der obere Index 0 bezieht sich auf den Punkt P_0.
Hat $f(x, y)$ in P_0 ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Für die Abhängigkeit des Dampfdrucks p einer Flüssigkeit von der Temperatur T gilt (10 P.)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\alpha}{T^2} \cdot p \qquad (*)$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung $p(T)$ von $(*)$ für

   (a) konstantes α

   (b) $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T \qquad (\alpha_0,\ \alpha_1 = \text{const.})$

5. Schlagen Sie die Reihenentwicklung von $1/(1-x)$ um $x = 0$ nach. Diese Taylorreihe hat einen Konvergenzradius von $|x| < 1$. Berechnen Sie damit $1/999$ auf 14 Nachkommastellen. Für eine Division durch 999 gibt es <u>keine</u> Punkte.
<u>Hinweis</u>: $999 = 1000 - 1$ (7 P.)

6. Berechnen Sie (10 P.)

$$\int \sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x})\,dx$$

<u>Hinweis</u>: Der erste Schritt ist eine naheliegende Substitution.

7. (a) Entwickeln Sie $\sin(x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ in eine Taylorreihe um $x = 0$. Geben Sie die ersten vier Terme explizit an. Die Taylorreihe von $\sin x$ um $x = 0$ dürfen Sie verwenden.

(b) Was ist das kleinste ($n \in \mathbb{N}$), für das in der Taylorreihe von $\sin(x^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) um $x = 0$ keine Terme $\propto x^m$ ($m \in \mathbb{N}$) mit m zwischen 12 und 17 (jeweils einschließlich) auftreten? Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von 7a).

(10 P.)

8. Wir betrachten die Matrizen **A** und **B**. (10 P.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

(b) Berechnen Sie (sorgfältig!) $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$. In welcher Beziehung stehen **A** und **B** zueinander?

(c) Geben Sie ohne weitere Rechnung den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!

9. Ist δf ein totales Differential? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!

$$\delta f = \left(x^2 + y^2\right)^2 \, dx \; + \; y \left(x^2 + y^2\right)^2 \, dy \qquad \text{(5 P.)}$$