14. Übungsblatt Mathematik II für Chemie und Wirtschaftschemie (Klausur von 2010)

1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (12 P.)

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \sin t + t$$

2. Wir betrachten $z = -i$. (10 P.)

   (a) Berechnen Sie alle dritten Wurzeln von z.

   (b) Zeichnen Sie $2z^2$ sowie alle dritten Wurzeln von z.

3. Für die Abhängigkeit des Drucks p eines idealen Gases mit dem Molekulargewicht M von der Höhe h gilt: (12 P.)

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{Mgp}{RT} \qquad (\nabla)$$

   Die allgemeine Gaskonstante ist R, g ist die Erdbeschleunigung und T die absolute Temperatur. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (∇)

   (a) für den isothermen Fall $T = T_0 = \text{const.}$

   (b) für eine höhenabhängige Temperatur $T = \alpha - \gamma h$. Hier sind α und γ positive Konstanten.

   Sowohl bei 3a) als auch bei 3b) ist das Ergebnis nach p aufzulösen.

4. Gegeben sind die drei Vektoren (8 P.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie zwei (linear unabhängige) Einheitsvektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen, ohne ein Skalarprodukt zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Man berechnet zunächst zwei senkrechte Vektoren und macht sie in einem zweiten Schritt zu Einheitsvektoren.

5. (a) Entwickeln Sie (9 P.)

$$y = \sqrt[3]{1+x}$$

um $x = 0$ bis zum linearen Glied einschließlich. Diese Taylorreihe hat einen Konvergenzradius von $|x| < 1$.

(b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von 5a) den Wert von $w = \sqrt[3]{60}$ auf zwei Nachkommastellen genau.
Hinweis: Wie groß ist 2^6 ?

6. (a) Lösen Sie die Gleichung (Δ). Die Nullstellen können komplex sein.

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad (\Delta)$$

(b) Lösen Sie

$$\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 2 = 0$$

ohne erneut eine quadratische Gleichung zu lösen. Verwenden Sie das Ergebnis von 6a). Stellen Sie das Ergebnis in der Form $a+ib$ ($a, b \in I\!N$) dar.

(c) Berechnen Sie den Extremwert von $y = x^2 - 2x + 2$. Kann (Δ) aus 6a) reelle Lösungen haben? Die Antwort muß ohne „Mitternachtsformel“ oder auch eines Teils von ihr sowie ohne quadratische Ergänzung und ohne Verwendung der Antwort von 6a) begründet werden.

(11 P.)

7. Wir betrachten die Summe (7 P.)

$$T = \sum_{n=-4}^{48} (a_n + 7n)\; x^{n+5}$$

(a) Bringen Sie T auf die Form $\sum_m b_m x^m$.

(b) Der Koeffizient von x^{10} sei null. Damit können Sie eines der a_n bestimmen. Welches und welchen Wert hat es?

8. Berechnen Sie (12 P.)

$$\int \frac{\ln(x-1)}{(x+1)^2}\, dx$$

Hinweis: Der erste Schritt ist eine partielle Integration.

9. Es war einmal…: Sie finden irgendwo die beiden Formeln (6 P.)

$$\begin{aligned} A &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ B &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

und erinnern sich noch, daß einer der beiden Ausdrücke zu $\sin(\alpha+\beta)$ und der andere zu $\cos(\alpha+\beta)$ gehören muß. Ordnen Sie ohne Verwendung trigonometrischer Beziehungen oder der Euler–Formel A und B zu $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ zu. Die Zuordnung ist zu begründen! Zur Begründung darf nur die Symmetrie von $\sin x$ und $\cos x$ verwendet werden.

10. Berechnen Sie (7 P.)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

11. Für welche Werte von α und β ist δf ein totales Differential? (6 P.)

$$\delta f = \left[y - y^2\sin\left(xy^2\right)\right]\, dx \;+\; \left[\alpha x + \beta xy\sin\left(xy^2\right)\right]\, dy$$

12. Gegeben ist $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (9 P.)

Berechnen Sie a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to -1} f(x,y)$ b) $\lim\limits_{y\to -1}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

c) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y)$? Begründen Sie Ihre Antwort!