Klausur Mathematik I und II für Chemie und Wirtschaftschemie SS 2012

1. Gegeben sind die Vektoren (11 P.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie sorgfältig die Winkel zwischen

   i. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie

   ii. zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d} = \vec{b} + 3\sqrt{3}\,\vec{c}$.

   Hinweis: Es ergeben sich jeweils sehr spezielle Orientierungen.

   (b) Berechnen Sie

$$\left| \vec{c} + \left(2\,\vec{a} \bullet \left(-\vec{b}\right)\right) \cdot \left(5\,\vec{a} - \sqrt{7}\,\vec{b} + 2\,\vec{c}\right) - \left(10\,\vec{a} \times \left(\vec{b} + 3\sqrt{3}\,\vec{c}\right)\right) \cdot \vec{b}^2 - \vec{a} \right|$$

   Zu Beginn der Rechnung muss der Ausdruck mit Hilfe des Ergebnisses von 1a) vereinfacht werden!

2. Die Funktion (15 P.)

$$h = f(x,y) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) + 8 \qquad (x \text{ und } y \text{ in Einheiten von } 100\,\text{m})$$

   beschreibt für $x \in [-4; 4]$ und $y \in [-4; 4]$ das Profil eines Berges. Sie wandern geradlinig von $A(4, -4)$ nach $B(0, 4)$.

   (a) Bestimmen Sie den Wertebereich Ihren Funktion h sowie die Höhe des Start– und des Zielpunkts.
   Hinweis: Beachten Sie den vorgegebenen Definitionsbereich!

   (b) Skizzieren Sie das Gelände und den Weg mit Hilfe von drei Höhenlinien in der x, y–Ebene.

   (c) Bestimmen Sie den höchsten Punkts Ihrer Wanderung. Es müssen Lagrange–Multiplikatoren verwendet werden. (Sonst gibt es keine Punkte.)

3. (a) Entwickeln Sie $y = \sqrt[5]{1+x}$ bis zum linearen Glied um $x = 0$. (10 P.)

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von 3a) $w = \sqrt[5]{1008}$ auf drei Nachkommastellen genau.
   Hinweis: Verwenden Sie 2^{10}.

4. Gegeben ist T. Berechnen Sie damit S. (5 P.)
   Sowohl S als auch T sind absolut konvergent.

$$T = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

5. Berechnen Sie x aus (6 P.)

$$\ln x + 2 \cdot {}^{x}\log e = 3 \, .$$

Hinweis: Es gibt mehr als eine Lösung.

6. Berechnen Sie $J = \displaystyle\int \frac{dx}{e^{x} - 4e^{-x}}$. (10 P.)

Hinweis: Der erste Schritt ist eine naheliegende Substitution.

7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (6 P.)

$$y' = \left(1 + y^2\right) \sin x$$

Das Ergebnis ist nach y aufgelöst gesucht.

8. Berechnen Sie K auf drei Nachkommastellen genau. (7 P.)

$$K = \frac{\binom{50}{7}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{51}{8}}{\binom{50}{7}}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst getrennt die beiden Summanden auf jeweils drei Nachkommastellen genau.

9. Berechnen Sie folgende Grenzwerte: (13 P.)

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(x^3\right)}{1 - e^{\left(1 - x^2\right)}}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0_+} (\sin x)^{\tan x}$

10. Gegeben ist $L = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (8 P.)

(a) Begründen Sie, weshalb der Wert dieses Integrals negativ ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von L das Integral M.

$$M = \int\limits_0^1 \frac{\ln(ax)}{1+x}\, dx \qquad (a > 0)$$

Hinweis: Wenden Sie zunächst die Logarithmengesetze an.

11. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie in das linke Bild $z_1 + z_2$, sowie z_1/z_2, und in das rechte Bild die Quadratwurzeln von z_2. (9 P.)
In dieser Aufgabe gibt es nur Punkte auf die Zeichnung.
Die beiden unteren Abbildungen dienen als Reserve.