

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte: 7 P.

a) $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\tan(3x)}$ b) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arccot}(2x)}{\cot(3x)}$

2. (a) Entwickeln Sie $y = \sqrt{1+x}$ um $x = 0$ bis zum linearen Glied. 12 P.
Diese Taylorreihe hat den Konvergenzradius 1.

(b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von 2a) $\sqrt{200}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst 14^2 .

(c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von 2b) $\sqrt{50}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

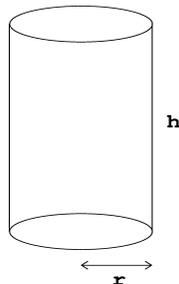
(d) Wie könnte man $\sqrt{200}$ beliebig genau berechnen?

Nennen Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, führen Sie die Rechnungen nicht durch!

3. Wir betrachten ein oben offenes zylinderförmiges Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche. Der Zylinder hat den Radius r und die Höhe h . Die Oberfläche $S > 0$ der Dose sei gegeben. Wie muß man r und h wählen, damit die Dose bei gegebener Oberfläche ein maximales Volumen V hat?

Die Aufgabe muß mit Lagrange-Multiplikatoren gelöst werden, sonst gibt es keine Punkte!

Skizzieren Sie die Dose in der Seitenansicht! 12 P.



4. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 11 P.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x, y)$.

Skizzieren Sie den Definitionsbereich von $f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie den Wertebereich von $f(x, y)$.

(c) Berechnen Sie die Höhenlinien von $f(x, y)$ für $z = 0$ und $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Skizzieren Sie die beiden Höhenlinien.

(d) Berechnen Sie das totale Differential df .

5. Berechnen Sie $T = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n}$

Hinweis: Ein sehr kurzer Lösungsweg beginnt mit: 6 P.

$$\binom{10}{n} = \binom{10}{n} 1^\alpha 1^\beta \quad \alpha, \beta: \text{etwas geeignetes}$$

6. Gegeben sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} . 10 P.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie einen Vektor \vec{c} , der

i. senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht und

ii. in der Reihenfolge $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bildet.

(b) Zeigen Sie, daß \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} einen Quader aufspannen.

(c) Für welches $\vec{d} = \alpha \vec{c}$ hat der Quader ein Volumen von 90 (VE)?

7. Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_a = -1 + i$ und $z_b = 2 + 2i$. 13 P.

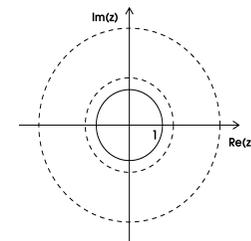
(a) Berechnen Sie $|z_a|$ und $|z_b|$. Zeichnen Sie anschließend z_a und z_b in das untenstehende Koordinatensystem (komplexe Zahlenebene) ein. In der komplexen Ebene sind bereits drei Kreise um den Nullpunkt eingezeichnet, die die Radien 1, $\sqrt{2}$ und $2\sqrt{2}$ haben.

(b) Die beiden komplexen Zahlen (z_a und z_b) sind eine komplexe Zahl z und eine ihrer dritten Wurzeln $\sqrt[3]{z}$. Welche Zahl ist z und welche $\sqrt[3]{z}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Wenn Sie nur Winkel betrachten, ist das Ergebnis nicht eindeutig!

(c) Berechnen Sie eine der anderen dritten Wurzeln von z in der Form $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Verwenden Sie dazu geeignete Additionstheoreme!



8. a) Berechnen Sie $I = \int_0^\infty x^{71} e^{-x^2} dx$. Tip: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ ($n \in \mathbb{N}_0$)

b) Berechnen Sie $J = \int \sin(2x) \cos(3x) dx$. 11 P.

9. Bringen Sie S auf die Form $S = \sum_n a_n x^n$. 8 P.

$$S = \sum_{k=0}^{28} (k^2 + 2)x^{k+2} + \sum_{n=3}^{32} (4n - 3)x^{n-1}$$