

Blatt 7, Aufgabe 13

Leapfrog Algorithmus

12.06.2014

Geschwindigkeit

Man führt zunächst eine Taylorentwicklung der Geschwindigkeit \mathbf{V} für $(t + \frac{\Delta t}{2})$ und $(t - \frac{\Delta t}{2})$ um (t) durch

$$\mathbf{V}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{V}(t) + \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right) \frac{\Delta t^2}{8} + \dots$$

$$\mathbf{V}(t - \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{V}(t) - \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right) \frac{\Delta t^2}{8} - \dots$$

Subtraktion beider Gleichungen:

$$\mathbf{V}(t + \frac{\Delta t}{2}) - \mathbf{V}(t - \frac{\Delta t}{2}) = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Geschwindigkeit

Es ist:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right) = \frac{\mathbf{F}}{M} = -\frac{\nabla\mathbf{U}}{M}$$

Einsetzen und umsortieren:

$$\mathbf{V}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{V}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{\nabla\mathbf{U}}{M}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Man führt eine Taylorentwicklung des Ortes \mathbf{R} für $(t + \Delta t)$ und (t) um $(t + \frac{\Delta t}{2})$ durch

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t + \frac{\Delta t}{2}) + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{t + \Delta t/2} \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_{t + \Delta t/2} \frac{\Delta t^2}{8} + \dots$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t + \frac{\Delta t}{2}) - \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{t + \Delta t/2} \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_{t + \Delta t/2} \frac{\Delta t^2}{8} + \dots$$

Subtraktion beider Gleichungen:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t) = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{t + \frac{\Delta t}{2}} \Delta t + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \right)$$

Es ist:

$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \mathbf{v}$$

Einsetzen und umsortieren:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3\right)$$