Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

Prof. Dr. Gerhard Taubmann
David Mahlberg

Mathematik II für Chemie und Wirtschaftschemie

Vorlesung: Di 10-12, H16

Seminar: Fr 8-10, H1

Das Übungsblatt wird im Seminar am 26.07.2019 als Präsenzübung bearbeitet

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/nawi/nawi-theochemie/lehre/` heruntergeladen werden.

Übungsblatt 14

Aufgabe 1

Ein Vater ist so alt wie seine drei Söhne zusammen. Vor zehn Jahren war er dreimal so alt wie sein ältester und fünfmal so alt wie sein zweiter Sohn. Der jüngste Sohn ist 14 Jahre jünger als sein ältester Bruder. Wie alt ist jeder der drei Söhne?

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Formen Sie dazu die Gleichungssysteme nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren um. Geben Sie die Lösung an, falls sie existiert.

a) $$\begin{aligned} 2x+2y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 1 \\ 6x+3y-z &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x+y+z &= 1 \\ 4x+y+2z &= 0 \\ 2x+z &= -1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x+8y+3z &= 2 \\ -2x+4y-z &= 0 \\ 2x+y+2z &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kann man ohne Rechnung voraussagen, ob die Eigenwerte reell sind?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

a) Welche der Aussagen über Determinanten sind richtig?

- Determinanten sind nur für quadratische Matrizen definiert.
- Ist $det(A) = 0$, so ist die Matrix A invertierbar.
- Bei zwei Matrizen A und B gilt: $det(A + B) = det(A) + det(B)$
- Bei zwei Matrizen A und B gilt: $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
- Jede beliebige Determinante kann mit der Sarrus-Regel berechnet werden.
- Matrix B entsteht aus A durch Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten. Es gilt: $det(B) = -det(A)$
- Matrix B entsteht aus A durch Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten. Es gilt: $det(B) = (-1)^{i+j} det(A)$

b) Welche Aussagen über lineare Gleichungssysteme (LGS) sind richtig?

- Ein homogenes LGS A$\vec{x} = 0$ mit mehr Unbekannten als Gleichungen besitzt nur die triviale Lösung.
- Wenn $det(A) = 0$, so hat das homogene lineare Gleichungssystem A$\vec{x} = 0$ nur die triviale Lösung.
- Wenn $det(A) \neq 0$, so ist das lineare Gleichungssystem A$\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.
- Die Cramersche Regel eignet sich eher für kleinere LGS, die Gaußsche Eliminierung eher für größere.
- Die Cramersche Regel eignet sich eher für größere LGS, die Gaußsche Eliminierung eher für kleinere.

c) λ ist ein Eigenwert zur reellen (n x n)-Matrix A. Welche Aussagen dazu sind äquivalent?

- Das Gleichunggssystem $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ hat nichttriviale Lösungen.
- Das Gleichunggssystem $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ hat nur die triviale Lösung.
- λ ist die Lösung der charakteristischen Gleichung $det(A - \vec{x}E) = 0$.
- Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $\vec{x}$ mit $\lambda A = \lambda\vec{x}$.
- Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.
- Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $\vec{x}$ mit $A = \lambda\vec{x}$.

d) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (in einem unitären bzw. euklidischen Vektorraum). Welche Aussagen bezüglich ihrer Orthogonalität sind richtig?

- $\vec{x} \perp \vec{y}$, wenn y = 0.
- $\vec{x} \perp \vec{y}$, wenn $< \vec{x}, \vec{y} > = 0$.
- $\vec{x} \perp \vec{y}$, wenn $< \vec{x}, \vec{y} > = 1$.