Klausur Mathematik III für Chemie und Wirtschaftschemie WS 2009/10

1. Berechnen Sie (7 P.)

$$\iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy$$

Der Integrationsbereich Ω ist der gesamte dritte Quadrant.
Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

2. (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 42 \qquad (*)$$

Verwenden Sie den üblichen Ansatz für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(b) Skizzieren Sie kurz (nicht durchrechnen!) einen weiteren Lösungsweg für $(*)$.

(7 P.)

3. Gegeben ist die Matrix (21 P.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Aussagen können Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin über die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ machen? Machen Sie eine Zeichnung und begründen Sie Ihre Antwort! Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$.

(b) Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist $P_3(\lambda) = -\left(\lambda^3 - 11\,\lambda^2 + 23\,\lambda + 2\right)$. Ist $\mathbf{A}$ regulär oder singulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Berechnen Sie $P_3(-1)$, $P_3(0)$ und $P_3(1)$. Schränken Sie damit den Bereich, in dem der betragskleinste Eigenwert von $\mathbf{A}$ liegen kann, über die Aussage von 3a) hinaus weiter ein.
Versuchen Sie nicht, die Eigenwerte zu berechnen!

(d) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ mit dem Satz von Cayley–Hamilton.

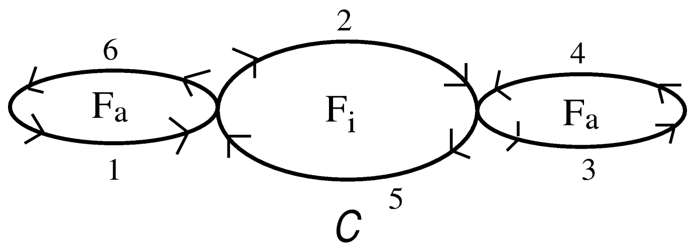
(e) Skizzieren Sie außer der Methode von 3d) zwei weitere Methoden, um die Inverse von $\mathbf{A}$ zu berechnen. (Rechnung nicht durchführen!)

4. Berechnen Sie die Determinante (5 P.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$$

Hinweis: Betrachten Sie jeweils zwei nebeneinanderstehende Spalten.

5. Gegeben ist der unten gezeigte geschlossene Weg $\mathcal{C}$, der in der gezeigten Richtung durchlaufen wird. $\mathcal{C}$ läuft längs 1 über 2, 3, 4, 5 und 6 bis zum Ausgangspunkt auf der linken Seite. Die links und rechts eingeschlossenen Flächen sind gleich groß (jeweils F_a) und es gilt $F_\mathrm{i} = 2F_\mathrm{a}$. (6 P.)
Geben Sie $\oint\limits_{\mathcal{C}} x\,dy$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!



6. Die unten gezeigte Funktion $f(x)$ hat die Periode 2π. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $f(x)$. Nutzen Sie die Symmetrie von $f(x)$ aus! Geben Sie die ersten fünf Terme der Fourierreihe explizit an (d. h. bis $n = 4$). (12 P.)