Institut für Theoretische Chemie:
Prof. Dr. Gerhard Taubmann, M.Sc. Anja Kobel

Mathematik I für Biochemie und Molekulare Medizin

Die Übungsbltter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` heruntergeladen werden.

Lösungen zum Übungsblatt 4

Aufgabe 1: *Elementare Rechenregeln für Summen*

$$\sum_{i=0}^{12} 1\ , \quad \sum_{\text{Birne}=14}^{87} \alpha\ , \quad \sum_{n=-7}^{3} 2\ , \quad \sum_{m=0}^{24} \frac{c}{\sqrt{625}}\ , \quad (3a^2-18a+27)\sum_{p=1}^{b}\frac{3+a}{(9b-3ab)}\ , \quad \sum_{n=1}^{4} a2^{ny}$$

Lösung 1:

$$\sum_{i=0}^{12} 1 = (12-0+1)\,1 = 13\ , \qquad \sum_{\text{Birne}=14}^{87} \alpha = (87-14+1)\,\alpha = 74\,\alpha$$

$$\sum_{n=-7}^{3} 2 = (3-(-7)+1)\,2 = 22\ , \qquad \sum_{m=0}^{24} \frac{c}{\sqrt{625}} = (24-0+1)\frac{c}{25} = c$$

$$(3\text{a}^2-18a+27)\sum_{p=1}^{b}\frac{3+a}{(9b-3ab)} = 3(a-3)^2(b-1+1)\frac{3+a}{-3b(a-3)} = -(a-3)(a+3) = 9-a^2$$

$$\sum_{n=1}^{4} a2^{ny} = a\sum_{n=1}^{4} 2^{ny} = a\,(2^{1y}+2^{2y}+2^{3y}+2^{4y}) = a\,(2^y+4^y+8^y+16^y)$$

Aufgabe 2: *Umformung von Summen*

$$\sum_{j=1}^{100} jx^{j+1} - \sum_{k=0}^{102} kx^{k-1}.$$

(a) Fassen Sie die gleichen Potenzen von x zusammen.
(b) Welcher Vorfaktor gehrt zu x^{50}?

Lösung 2:

(a) Fassen Sie die gleichen Potenzen von x zusammen.

$$\sum_{j=1}^{100} jx^{j+1} - \sum_{k=0}^{102} kx^{k-1}$$

Index-Shift: $\quad \text{j} \to (j-1) \qquad k \to (k+1)$

$$\sum_{j=2}^{101} (j-1)x^{j} - \sum_{k=-1}^{101} (k+1)x^{k}$$

2. Summe aufteilen, damit sie bei 2 beginnt:

$$\sum_{j=2}^{101}(j-1)x^j - \sum_{k=2}^{101}(k+1)x^k - \sum_{k=-1}^{1}(k+1)x^k$$

Summen x^j und x^k zusammenfassen:

$$= \sum_{j=2}^{101}(j-1-j-1)x^j - \sum_{k=-1}^{1}(k+1)x^k$$

1. Summe vereinfachen, 2. Summe auflösen:

$$= -2\sum_{j=2}^{101}x^j - 1 - 2x$$

(b) Welcher Vorfaktor gehört zu x^{50}?

Antwort: -2

Aufgabe 3: *Berechnung endlicher Summen*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion (siehe Skript), dass

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion (analog zu Aufgabe (a)), dass

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) Berechnen Sie ohne umzuformen die folgende Summe durch Aufschreiben aller Terme

$$\sum_{\nu=1}^{5}[(\nu+1)-\nu]$$

(d) Berechnen Sie ohne umzuformen die folgende Summe durch Aufschreiben aller Terme

$$\sum_{\nu=1}^{5}[(\nu+1)^2-\nu^2]$$

(e) Wenn sie das Prinzip aus (c) und (d) verstanden haben können sie nun ganz schnell folgende Summe ausrechnen

$$\sum_{\nu=1}^{99}[(\nu+1)^2-\nu^2]$$

(f) Was gilt nun wohl allgemein für

$$\sum_{\nu=1}^{n}[a_{(\nu+1)} - a_\nu]$$

Lösung 3:

(a) Induktionsvorraussetzung:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang $n = 0$, $n = 1$:

$$\sum_{\nu=0}^{0}\nu = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{1}\nu = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1}\nu &= \sum_{\nu=0}^{n}\nu + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

(b) Induktionsvorraussetzung:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang $n = 0$, $n = 1$:

$$\sum_{\nu=0}^{0}\nu^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{1}\nu^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1}\nu^2 &= \sum_{\nu=0}^{n}\nu^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{\nu=1}^{5}[(\nu+1)-\nu] = 2-1+3-2+4-3+5-4+6-5 = 6-1 = 5$$

(d)

$$\sum_{\nu=1}^{5}[(\nu+1)^2-\nu^2] = 4-1+9-4+16-9+25-16+36-25 = 36-1 = 35$$

(e)

$$\sum_{\nu=1}^{99}[(\nu+1)^2-\nu^2] = 100^2-1 = 9999$$

(f)

$$\sum_{\nu=1}^{n}[a_{(\nu+1)}-a_\nu] = a_{n+1}-a_1$$

Aufgabe 4: *Arithmetische Summe*

Von einer arithmetischen Summe sind gegeben:
erster Summand $= -54$, letzter Summand $= +3$ und die Summe $= -510$. Wieviele Summanden kommen vor und welches ist die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Summanden?

Lösung 4:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\nu}^{n-1}(a+\nu d) = a+(a+d)+...+(a+(n-1)d) = \\ &= \sum_{\nu}^{n-1} a + d\sum_{\nu}^{n-1}\nu = n\,a + d\,\frac{n(n-1)}{2} = \\ &= n\left[a+\frac{d}{2}(n-1)\right] \end{aligned}$$

letzter Summand:

$$a_n = a+(n-1)d \qquad \Rightarrow (n-1)d = a_n - a$$

Einsetzen in A_n ergibt:

$$A_n = n(a+\frac{1}{2}(a_n-a)) = \frac{n}{2}(a+a_n)$$

also

$$n = \frac{2A_n}{a+a_n} \qquad \text{und somit hier:} \qquad n = \frac{2\cdot(-510)}{-54+3} = \frac{-1020}{-51} = 20$$

und folglich ergibt sich für d:

$$d = \frac{a_n-a}{n-1} = \frac{3-(-54)}{19} = \frac{57}{19} = 3$$