Institut für Theoretische Chemie:
Prof. Dr. Gerhard Taubmann, Daniela Künzel, Benedikt Weggler

Mathematische Methoden III für Chemie und Wirtschaftschemie

Fr. 10:15 Uhr, H7, H21

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/nawi/nawi-theochemie/lehre` *heruntergeladen werden.*

Übungsblatt 10, Übung am 11. 01. 2013

Aufgabe 1: *Frage aus der Vorlesung*

Beantworten Sie die Frage aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: *Linienintegral*

Berechnen Sie die Kurvenintegrale folgender Funktionen, wobei die Kurve C entlang des Dreiecks von (0,0) nach (1,0) nach (0,1) und wieder zu (0,0) verläuft:

(a) $\oint_C (x+y)ds$ (b) $\oint_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$ (c) $\oint_C (xdx + ydy)$ (d) $\oint_C (xydx + xdy)$ (e) $\oint_C (x+y)dx$

Geben Sie zuerst die Parametrisierung des Weges an: Wie lauten $\vec{\gamma}_1(t)$, $\vec{\gamma}_2(t)$, $\vec{\gamma}_3(t)$? Hinweis:

- Es sei $\vec{\gamma}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ der mittels $t \in [a,b]$ parametrisierte Ortsvektor eines stückweise stetig differenzierbaren Weges der vom Anfangspunkt $\vec{\gamma}(a)$ bis zum Endpunkt $\vec{\gamma}(b)$ führt.
- Kurvenintegral 1. Art (die Funktion f ist eine Zahl, kein Vektor): $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))|\dot{\vec{\gamma}}(t)|dt$.
- Kurvenintegral 2. Art (nun ist $\vec{f}$ ein Vektor): $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt$.
- Neben diesen Integralen gibt es noch solche, die nicht an der *direkten* Fläche unter der Funktion entlang des Weges interessiert sind, sondern nur an der Projektion dieser Fläche auf eine der Ebenen, die von jeweils einer Koordinatenachse und der Funktionswertachse gebildet werden, z.B. an $\int_C f(x,y)dx = \int_C f(x,y(x))dx = \int_C f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}dt$ oder an $\int_C f(x(y),y)dy$.

Aufgabe 3: *Linienintegral*

Berechnen Sie das Linenintegral $\int_C \vec{f} d\vec{\gamma}$ über die Funktion

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+3 \\ xz \\ yz-x \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen

$$0 \leq t \leq 1$$

Aufgabe 4: *Linienintegral*

Berechnen Sie den Wert des Linenintegrals

$$\int_{(-1,1)}^{(1,1)} [(x+y)dx + (x-y)dy]$$

entlang der Parabel $y = x^2$.
Ist auch ein einfacherer Weg möglich?

Aufgabe 5: *Linienintegral*

Berechnen Sie den Wert des Linienintegrals

$$\int [(5x^3 + \frac{1}{2}y^2)\, dx + (\sin(y) + yx)\, dy]$$

von (1,0) nach (1,2π) entlang $\cos(y)$.

Aufgabe 6: *Linienintegral*

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} [(2x^2y^3 + 1)\, dx + (2x^3y^2 + 2)\, dy]$$

für die folgenden Wege:
a) Entlang der Achsen des Koordinatensystems.
b) Entlang der Geraden, die beide Punkte verbindet.
c) In Polarkoordinaten entlang eines Kreisbogens.
Ist es nötig, jeden Weg neu zu berechnen? Warum?
Berechnen Sie explizit jeden der 3 vorgeschlagenen Wege.

Aufgabe 7: *Linienintegral*

Gegeben ist der unten gezeigte geschlossene Weg C, der in der gezeigten Richtung durchlaufen wird. C läuft längs 1 über 2, 3, 4, 5 und 6 bis zum Ausgangspunkt auf der linken Seite. Die links und rechts eingeschlossenen Flächen sind gleich groß (jeweils F_a) und es gilt F_i=2F_a.
Geben Sie $\oint_C x\, dy$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!