

1. (a) Entwickeln Sie $y = \sqrt[4]{1+x}$ um $x = 0$ bis zum linearen Glied. 11 P.
Diese Taylorreihe hat den Konvergenzradius 1.
- (b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von 1a) $\sqrt[4]{600}$ auf zwei Nachkommastellen genau.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst sorgfältig 25^2 .
- (c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von 1b) $\sqrt[4]{9600}$ auf zwei Nachkommastellen genau.
- (d) Wie könnte man $\sqrt[4]{600}$ beliebig genau berechnen?
Nennen Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, führen Sie die Rechnungen nicht durch! Es ist nach mathematischen Verfahren gefragt, nicht nach Werkzeugen wie Taschenrechner o. ä.

2. Welcher Punkt auf der Parabel $y = x^2 + 3$ hat den kleinsten Abstand zum Nullpunkt?
Die Aufgabe muß mit einem Lagrange-Multiplikator gelöst werden, sonst gibt es keine Punkte! 9 P.
Hinweis: Minimieren Sie nicht den Abstand ℓ , sondern sein Quadrat ℓ^2 .

3. Die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} spannen einen Spat (Parallelepiped) auf. 13 P.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie das Volumen des Spats.
- (b) Berechnen Sie die Oberfläche des Spats.
Aufgabe 3b) muß mit Kreuzprodukten gelöst werden!
- (c) Wir betrachten jetzt drei um jeweils geeignete (aber nicht gleiche) Winkel gedrehte Vektoren $\tilde{\vec{a}}$, $\tilde{\vec{b}}$ und $\tilde{\vec{c}}$. Nach der Drehung hat $\tilde{\vec{a}}$ immer noch die Länge von \vec{a} ($\tilde{\vec{b}}$, $\tilde{\vec{c}}$ analog). Wie groß kann das Volumen des von $\tilde{\vec{a}}$, $\tilde{\vec{b}}$ und $\tilde{\vec{c}}$ aufgespannten Spats maximal werden? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - \cos x} \right)$. 6 P.

5. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $\frac{y'}{3x \sin x + 3x} = \cos^2 y$ b) $y'' - 2y' - 3y = 0$

Auch bei a) ist die Lösung nach y aufgelöst gesucht! 9 P.

6. Gegeben sind $\binom{20}{8} = 125970$, $\binom{20}{9} = 167960$, $\binom{20}{10} = 184756$. 6 P.

Berechnen Sie den Zahlenwert von $\binom{22}{10}$, ohne dabei jemals zu multiplizieren oder zu dividieren!

7. Gegeben ist das Integral $I = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$. 6 P.

Berechnen Sie damit $J = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - 1} dx$.

Hinweis: Versuchen Sie nicht, das unbestimmte Integral zu berechnen!

8. Gegeben sind $z_1 = \sqrt{2} \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right) = -1 + i$ und $z_2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Berechnen Sie mit diesen Angaben $\cos 15^\circ$ und $\sin 15^\circ$, ohne irgendwelche anderen Zahlenwerte von trigonometrischen Funktionen zu verwenden. Begründen Sie Ihre Antwort! 9 P.

9. Wir betrachten $S(x) = \sum_{k=-2}^{30} (k^2 + 3) x^{k+3} + \sum_{m=-1}^{32} (m - 2) x^{m+1}$ 9 P.

(a) Bringen Sie $S(x)$ auf die Form $S(x) = \sum_k a_k x^k$.

(b) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$.