

Klausur Mathematik I für Biochemie und Molekulare Medizin

1. (a) Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt $0, \overline{12} + \frac{5}{11} + \frac{n}{33} = \sin^2(3 \cdot 14) + \cos^2(7 \cdot 6)$? 11 P.

(b) Wir betrachten $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Für welches α gilt dann

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ?$$

Hinweis zu 1b): Vereinfachen Sie zunächst getrennt die linke und die rechte Seite!

2. Es gilt $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ (*) $n \in \mathbb{N}$ 9 P.

(a) Beweisen Sie (*) mit vollständiger Induktion.

(b) Berechnen Sie S_{100} , ohne dabei (*) zu verwenden!

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} (2k-1)$$

3. Wir betrachten 9 P.

$$S = \sum_{n=-2}^{30} (n^2 - n) x^{n+2} + \sum_{k=2}^{40} (k-3) x^{k-2}$$

Bringen Sie S auf die Form $S = \sum_m a_m x^m$.

4. Der Entwicklungssatz lautet: 9 P.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

(a) Berechnen Sie mit dem Entwicklungssatz $[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \cdot \vec{a}$

(b) Ermitteln Sie $[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \cdot \vec{a}$, ohne dabei den Entwicklungssatz zu verwenden. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Es gelte: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -1$ sowie $|\vec{c}| = \sqrt{5}$. Berechnen Sie damit

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})]$$

5. Letzte Woche hatten Sie Ihre Formelsammlung mit im Labor und es ist Ihnen ein Tröpfchen Schwefelsäure entkommen. Die Seite mit den trigonometrischen Formeln sieht jetzt so aus: 11 P.

L

$$\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Das Loch „L“ geht durch bis zu den Integralen. Sie wissen noch, daß auf der linken Seite $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ und $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ standen. Welcher dieser Ausdrücke gehört in welche Zeile? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls Sie diese Formeln zufällig kennen (oder aufgeschrieben haben), gilt das nicht als Antwort!

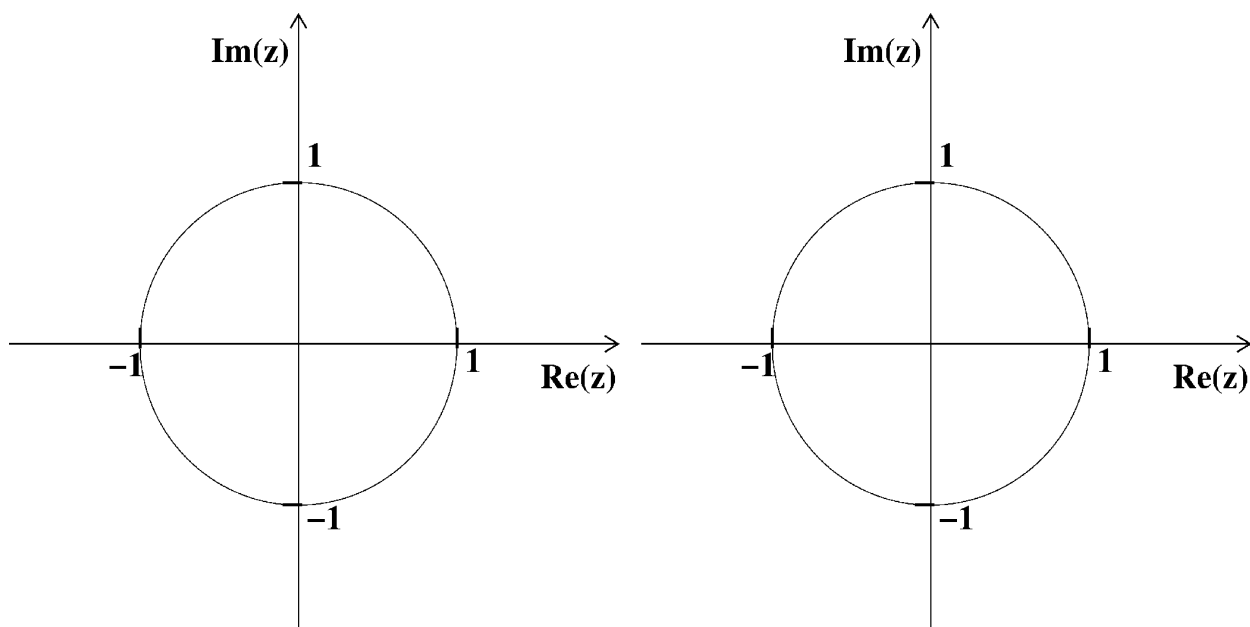
Hinweis: Verwenden Sie gleichzeitig die Symmetrie von $\sin x$ und $\cos x$. Auch ein sehr spezieller Wert von $\sin x$ ist sehr nützlich.

6. (a) Eine Menge komplexer Zahlen z erfüllt die Gleichung 11 P.

$$\frac{1}{4z} = z^* \quad (\nabla)$$

Was können Sie über z aussagen? Zeichnen Sie unten in die komplexe Ebene alle Zahlen ein, die (∇) erfüllen. Das rechte Bild dient der Reserve.

- (b) Berechnen Sie mit der Eulerschen Formel und mit dem Binomialsatz einen Ausdruck für $\cos(4x)$, in dem nur noch Zahlen und Potenzen von $\cos(x)$ vorkommen.



7. Berechnen Sie jeweils als eine einzige Zahl: 10 P.

a) $A = \binom{20}{5}$ b) $B = \left[\binom{20}{10} + 2 \cdot \binom{20}{11} + \binom{20}{12} \right] \cdot \frac{26!! \cdot 22!!}{44!!}$

Hinweis: $12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$

8. Unten sind in der komplexen Ebene die beiden komplexen Zahlen z_1 und z_2 eingezeichnet. Zusätzlich sehen Sie jeweils den Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.

Die beiden unteren Abbildungen dienen als Reserve.

In dieser Aufgabe gibt es Punkte nur auf richtige Zeichnungen. Andere Überlegungen sind natürlich erlaubt, werden aber nicht bewertet. 9 P.

(a) Zeichnen Sie ins linke Bild $z_1 + z_2^*$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Zeichnen Sie ins rechte Bild alle dritten Wurzeln von z_2 .

