Klausur im WS 2015/16

1. Bringen Sie S auf die Form $S = \sum_m a_m x^m$. 8 P.

$$S = \sum_{k=2}^{70} \left(k^2 - 1\right) x^{k+2} + \sum_{n=5}^{70} (n+2)\, x^{n-1}$$

2. In dieser Aufgabe geht es um endliche Summen. 8 P.

   (a) Berechnen Sie $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 298 + 299 + 300$.

   (b) Berechnen Sie $S_2 = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 297 + 300$.

   (c) Berechnen Sie $S_3 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 + \ldots + 295 + 296 + 298 + 299$. (Im Vergleich zu S_1 fehlen in S_3 alle durch drei teilbaren Summanden.)
   Hinweis: Verwenden Sie in 2c) die Ergebnisse von 2a) und 2b).

3. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einer Bahn mit dem 9 P.

   Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

   (a) Für welche Werte t_0 im Bereich $t \in [0; 4\pi]$ gilt $\vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t_0) \end{pmatrix}$?
   Begründen Sie Ihre Antwort! Geben Sie alle $\vec{r}\,(t_0)$ an!

   (b) Berechnen Sie $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

   (c) Für den Drehimpuls $\vec{L}$ gilt $\vec{L} = \vec{r} \times (m\,\vec{v})$. Kann $\vec{L} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne ein Kreuzprodukt zu berechnen!

4. Gegeben sind die Punkte $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, 1)$ und $P(0, 0, 1-\sqrt{6})$. 10 P.
   Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ schließen den spitzen Winkel φ ein.

   (a) Berechnen Sie φ. Begründen Sie Ihre Antwort!
   Aufgabe 4a) ist ohne die Berechnung eines Kreuzproduktes zu lösen!

   (b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABP. Aufgabe 4b) muß mittels eines Kreuzproduktes gelöst werde, sonst gibt es keine Punkte!

5. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: 6 P.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion!

6. In dieser Aufgabe kommen keine Vektoren vor. 9 P.

   (a) Berechnen Sie (als eine einzige Zahl)

   $$K = \binom{49}{6} \cdot \frac{43!! \cdot 5!!}{49!!}$$

   Hinweis: Die Doppelfakultät $(2n+1)!!$ ($n \in \mathbb{N}_0$) einer ungeraden Zahl $(2n+1)$ ist definiert als:
   $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$

   (b) Es gilt: $\binom{70}{35} + \binom{70}{36} = \binom{71}{36}$ $\quad (*)$

      i. Begründen Sie $(*)$ mit einem Ihnen bekannten Satz.

      ii. Gegeben ist $\binom{70}{35} = a \cdot \binom{71}{36}$. Berechnen Sie a.

      iii. Es gilt: $\binom{71}{36} \approx 2,2 \cdot 10^{20}$.
      Bestimmen Sie damit und mit der Antwort aus 6(b)ii) einen Näherungswert (eine Nachkommastelle für die Mantisse) für $\binom{70}{35}$.
      Verwenden Sie dazu einen Näherungswert für a aus 6(b)ii), der auf eine Nachkommastelle genau ist.

7. In dieser Aufgabe geht es um den Binomial- und den Multinomialsatz. 9 P.
Die Ergebnisse müssen jeweils vollständig vereinfacht sein!

   (a) Berechnen Sie den Term in

   $$\left(x + \frac{3y}{x} + 22\,x^2\,y^5\,z\right)^6,$$ in dem weder x noch z vorkommen!

   (b) Berechnen Sie $\left(x + \frac{2}{x}\right)^4$ mit dem Binomialsatz.