Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

ulm university universität uulm

Prof. Dr. Gerhard Taubmann
David Mahlberg

Mathematik I für Chemie und Wirtschaftschemie

Vorlesung: Mo u. Do, 12-14, O25/H1; Seminar: Mi, 8-12

Das Übungsblatt wird im Seminar am 07.10.18 als Präsenzübung bearbeitet

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/nawi/nawi-theochemie/lehre/` heruntergeladen werden.

Übung 4: Lineare Algebra

1. Aufgabe: Parallelverschiebung von Vektoren

Bestimmen Sie die Komponenten und den Betrag des Vektos $\vec{v}$ der durch die Punkte $A(1,2,3)$ und $B(1,0,-2)$ geht. Verschieben Sie diesen Vektor im Raum, sodass $D(1,3,-3)$ neuer Endpunkt ist. Wie lautet nun der Anfangspunkt C des Vektors?

2. Aufgabe: Parallele und Orthogonale Vektoren

Gegeben ist der Vektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie einen Einheitsvektor $\vec{b}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist.
2. Berechnen Sie einen Einheitsvektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

3. Aufgabe: Länge eines Vektors

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$ und berechnen Sie dessen Länge.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe: Einfache Vektorrechnung

Bestimmen sie den Vektor $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$, wobei gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe: Skalarprodukt

Gegeben ist das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 42$. Schlagen Sie fünf verschiedene Kombinationen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ vor, damit das Scalarprodukt diese Ergebnis ergibt.

6. Aufgabe: Orthogonale Vektoren

Bestimmen Sie für die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Unbekannte k so, dass die Vektoren orthogonal sind.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -2\vec{e}_1 + (4-k)\vec{e}_2 + (k+1)\vec{e}_3 \qquad \text{und} \\ \vec{v} &= 3k\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + (k-1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

7. Aufgabe: Winkel zwischen Vektoren

Für diese Aufgabe dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.
Es sollen die Winkel zwischen den Atomen in AB_3-Molekülen bestimmt werden. Dazu wird besagtes Molekül so in ein Koordinatensystem gelegt, dass sich für die Atome folgende Koordinaten ergeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_A \end{pmatrix}; \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze.

(a) Bestimmen Sie die Winkel $\measuredangle(BAB)$ für ein planares AB_3-Molekül - also $A \in xy$-Ebene $\rightarrow z_A = 0$.

Nun soll das Atom A nicht mehr in der xy-Ebene liegen:

(b) Bestimmen Sie $\measuredangle(BAB)$ für $z_A = 1$.

(c) (**Zusatz**) Aus Messungen ist der Winkel $\measuredangle(BAB)$ bekannt, er beträgt $93,5°$. Bestimmen Sie z_A.

8. Aufgabe: 3x3-Determinanten

Berechnen sie die folgenden Determinanten.

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Aufgabe: Spatprodukt

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Wie groß ist die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Fläche?
2. Berechnen Sie das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats.

10. Aufgabe: (Zusatz)

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})$ einmal direkt und einmal mit dem Entwicklungssatz.

(b) Bestimmen Sie den Winkel unter dem sich $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schneiden.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der von $\vec{d}$ und $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})$ aufgespannten Ebene steht. Wie können sie ihr Ergebnis überprüfen?