Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

Prof. Dr. Gerhard Taubmann
Christian Mosch
Sebastian Schnur

Mathematische Methoden II für Biochemie und Molekulare Medizin
Mi 13-15 N25/568 (BioChem), Mi 14-16 N24/131 (MolMed)
Übungsblatt 10, verteilt 27.6.2007, Übung 4.7.2007

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` heruntergeladen werden.

Aufgabe 1: *Inverse Matrix*

Gegeben seien die folgende Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{AB}$.
(b) Geben Sie $\boldsymbol{A}^{-1}$ an. In welchem Fall existiert $\boldsymbol{A}^{-1}$ nicht?

Aufgabe 2: *Inverse Matrix*

Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenn Sie hierfür eine kompakte Formel kennen, können Sie diese auch verwenden.

Aufgabe 3: *Determinanten*

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a \\ 3 & 0 & 1a \\ -1 & 4 & 2a \end{vmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{vmatrix} x & b & 0 & b \\ b & x & b & 0 \\ 0 & b & x & b \\ b & 0 & b & x \end{vmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a & b \\ 2 & 2i & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & c \\ 3 & 3i & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & d \\ 4 & 4i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & e \\ 5 & 5i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & f \\ 6 & 6i & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & g \\ 7 & 7i & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & h \\ 8 & 8i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & j \\ 9 & 9i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix}$$

Hinweis: Zur Berechnung von (e) muss man nur nachdenken.

Aufgabe 4: *Determinanten*

Man kann das Vektorprodukt und das Spatprodukt durch Determinante berechnen:

$$\vec{u} \times \vec{v} \;=\; \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}; \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}\,) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Hierbei sind $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, und $\vec{e}_z$ Einheitsvektoren: z.B. $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$.

(a) Der Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms ist $A = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\,\sin\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Berechnen Sie A für $\vec{u} = (r + r\cos\frac{\pi}{3})\vec{e}_x + r\sin\frac{\pi}{3}\vec{e}_y$ und $\vec{v} = (r + r\cos\frac{\pi}{3})\vec{e}_x - r\sin\frac{\pi}{3}\vec{e}_y$.

(b) Das Volumen des von $\vec{u}$, $\vec{v}$, und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds ist $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}\,)|$. Berechnen Sie V für $\vec{u} = \frac{a}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{v} = \frac{a}{2}(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$, und $\vec{w} = \frac{a}{2}(\vec{e}_z + \vec{e}_x)$.