Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

Prof. Dr. Gerhard Taubmann
Sonja Bartenschlager, Benjamin Berberich,
Miriam Kubach, Anne Kröske

Mathematik I für Chemie und Wirtschaftschemie (Bachelor)

Di 10-11: N25/214, O25/151, O25/648
Di 13-14: N24/252, N25/568, O25/648

Übungsblatt 5 , verteilt 13.11.2007, Übung 20.11.2007

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` heruntergeladen werden.

Aufgabe 1: *Spatprodukt*

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Belegen Sie, dass beim Spatprodukt zyklisch vertauscht werden darf, d.h. dass gilt:

$$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \odot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Hinweis: Das Verwenden der Determinantenschreibweise wird empfohlen.
Welche geometrische Bedeutung hat das Spatprodukt?
Wie lautet die allgemeine Relation zwischen $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ und $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$? Bestimmen Sie nun $\vec{b} \odot (\vec{a} \times \vec{c})$.

Aufgabe 2: *Spatprodukt*

Es sei $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 3$. Berechnen Sie damit $(\vec{a} + \vec{c}) \left(\vec{b} \times (\vec{a} - \vec{c})\right)$.

Aufgabe 3: *Entwicklungssatz*

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie die Gültigkeit des Entwicklungssatz $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \odot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \odot \vec{b}\right)$ anhand dieses Beispiels.

Aufgabe 4: *Winkel zwischen Vektoren*

Für diese Aufgabe dürfen Sie einen Taschenrechner benützen.
Es sollen die Winkel zwischen den Atomen in AB_3-Molekülen bestimmt werden. Dazu wird besagtes Molekül so in ein Koordinatensystem gelegt, dass sich für die Atome folgende Koordinaten ergeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_A \end{pmatrix}; \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze.

(a) Bestimmen Sie die Winkel $\measuredangle(BAB)$ für ein planares AB_3-Molekül - also $A \in xy$-Ebene $\rightarrow z_A = 0$.

Nun soll das Atom A nicht mehr in der xy-Ebene liegen.

(b) Bestimmen Sie $\measuredangle(BAB)$ für $z_A = 1$.

(c) Aus Messungen ist der Winkel $\measuredangle(BAB)$ bekannt, er beträgt $93,5°$. Bestimmen Sie z_A.

Aufgabe 5: *Elementare Rechenregeln für Summen*

Berechnen Sie die folgenden Summen unter Verwendung der Ihnen bekannten Sätze:

$$\sum_{i=0}^{145} 1\,, \qquad \sum_{\text{Apfel}=4}^{33} \beta\,, \qquad \sum_{n=-5}^{5} 5\,, \qquad \sum_{m=0}^{12} \frac{c}{\sqrt{169}}\,, \qquad (1+2c+c^2)\sum_{p=1}^{b} \frac{1-c}{b+bc}\,, \qquad \sum_{n=1}^{3} 6\sqrt[n]{y}$$

Aufgabe 6: *Umformung von Summen*

(a)

$$\sum_{j=1}^{100} j x^{j+1} - \sum_{k=0}^{102} k x^{k-1}.$$

(i) Fassen Sie die gleichen Potenzen von x zusammen.
(ii) Welcher Vorfaktor gehört zu x^{50}?

(b) Fassen Sie gleiche Terme von x auch im folgenden Ausdruck zusammen:

$$\sum_{k=-3}^{50} 2k^2 x^{k-2} - \sum_{k=1}^{47} \frac{x^{k+4}}{k^2}$$

Aufgabe 7: *Parallelogramm*

Gegeben sind die folgenden Koordinaten:

$$A = (0,0); \qquad B = (4,1); \qquad C = (2,3); \qquad D = (6,4).$$

Zeigen Sie rechnerisch, dass diese die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Berechnen Sie dessen Fläche.

Aufgabe 8: *Senkrechte Vektoren*

Bestimmen Sie für die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Unbekannte k so, dass die Vektoren orthogonal sind.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -2\vec{e}_1 + (4-k)\vec{e}_2 + (k+1)\vec{e}_3 \qquad \text{und} \\ \vec{v} &= 3k\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + (k-1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 9: *Senkrechte Vektoren*

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ c_y \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie c_y so, dass $\vec{c}$ senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht.

Aufgabe 10: *Arbeit*

Ein Körper wird durch die Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} f_{2,x} \\ f_{2,y} \\ f_{2,z} \end{pmatrix}$ vom Punkt $P_0 = (0,0,0)$ zum Punkt $P_1 = (3,1,-2)$ bewegt.
Bestimmen Sie Richtung, Betrag der Kraft $\vec{F}_2$ und den Winkel α den sie mit dem Weg $\vec{s}$ einschließt.
Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{F}_1$ und $\vec{s}$? Fertigen Sie eine Skizze.
Berechnen Sie die Arbeit, die jeweils von den Kräften F_1 und F_2 geleistet wird. Zeigen Sie, dass die Summe der Einzelarbeiten gleich der verrichteten Gesamtarbeit ist.

Die Aufgaben 7,8,9 und 10 sind Hausaufgaben.