Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

Prof. Dr. Gerhard Taubmann
Sonja Bartenschlager, Benjamin Berberich,
Miriam Kubach, Anne Kröske

Mathematik I für Chemie und Wirtschaftschemie (Bachelor)
Di 10-11: N25/214, O25/151, O25/648
Di 13-14: N24/252, N25/568, O25/648
Übungsblatt 9, verteilt 11.12.2007, Übung 18.12.2007

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` heruntergeladen werden.

Aufgabe 1: *Geographische Koordinaten von ???*

Von einem Ort auf der Erde sind die folgenden kartesischen Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} x &= -5492,15361\,km \\ y &= -2237,579923\,km \\ z &= 2314,182536\,km \end{aligned}$$

Stellen Sie fest, um welchen Ort es sich hierbei handelt. (Sie dürfen hier den Taschenrechner (TR) verwenden. Zur Überprüfung können Sie Ihre Geographischen Koordinaten bei GoogleMaps eingeben!)
Berechnen Sie zunächst die Polarkoordinaten, um daraus dann die gesuchten Geographischen Koordinaten zu erhalten. Vergessen Sie nicht auf Quadranten und die unterschiedlichen Winkeldefinitionen der einzelnen Koordinatensysteme zu achten!
Hinweis: Wählen Sie das kartesische Koordinatensystem so, dass sich der Ursprung im Erdmittelpunkt befindet, die x-Achse in Richtung von Länge 0° und Breite 0°, die y-Achse in Richtung Länge 90° Ost und Breite 0° und die z-Achse in Richtung von Breite 90° Nord zeigen.

Aufgabe 2: *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Berechnen Sie die Ausdrücke (in der Form: $z = a + b\,i\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$) und stellen Sie ihre Ergebnisse graphisch dar:

$$\begin{aligned} s &= z_1 + z_2\,, \quad d = z_1 - z_2\,, \quad p = z_1 \cdot z_2 \quad \text{und} \quad q = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{mit:} \\ z_1 &= 2 + 2\,i\,, \quad z_2 = -2\,i + 1 \end{aligned}$$

Wie lautet $Re(z_2)$ und $Im(z_2)$? Berechnen Sie außerdem die Beträge und das konjugiert Komplexe von z_1, z_2, s, d, p und q, sowie z_2^2, $z_2\,z_2^*$ und $|z_2|^2$. Was fällt ihnen auf?

Aufgabe 3: *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Bringen sie die folgenden Ausdrücke in die Form: $a + b\,i\,,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{(a)} \quad z = \frac{4 - \frac{1}{2}i}{2 + i} - (\frac{1}{2} - 2\,i)\,, \qquad \text{(b)} \quad \frac{-3 + i}{i}\,, \qquad \text{(c)} \quad z = \frac{\sqrt{2}(1+i)\sqrt{-1}}{\left|\frac{i+1}{i-1}\right|(i-3) + (1-i)^* \cdot (1+i)}$$

Aufgabe 4: *Darstellung komplexer Zahlen: Gauß'sche Zahlenebene und Polarkoordinaten*

Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die kartesische bzw. Polarkoordinatendarstellung um und stellen Sie diese graphisch dar.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & 2(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi) & \text{(d)}^{TR} & 4 - \frac{1}{2}i \\ \text{(b)} & 5(\cos 60° + i\sin 60°) & \text{(e)} & -2 - i \\ \text{(c)} & 2(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) & \text{(f)}^{TR} & -\frac{3}{2} + 2i \end{array}$$

Aufgabe 5: *Komplexen Zahlen und Binomische Formel*

Berechnen Sie unter Verwendung der Binomischen Formel und bringen Sie das Ergebnis auf die Form $z = a + i\,b$.

$$\text{(a)} \quad (3 - \sqrt{2}\,i)^5\,, \qquad \text{(b)} \quad (1+i)^6$$

(c) Überlegen Sie sich, wie man $(1+i)^6$ noch auf andere Weise (nicht Moivre !) möglichst schnell und einfach berechnen könnte. Berechnen Sie damit $(1-i)^{200}$ und $(1-i)^{199}$.

Aufgabe 6: *Hinleitung zur Eulerschen Formel*

Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$$
folgende Eigenschaften besitzt:

$$\text{(a)} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \text{(b)} \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

(c) Welche elementare Funktion kennen Sie, die genau diese Eigenschaften besitzt?

Aufgabe 7: *Widerspruchsbeweis*

Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Hinweis: Gehen Sie von der Annahme aus, es gäbe endlich viele Primzahlen P_i. Betrachten Sie nun die Zahl $N = (P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_n) + 1$.

Aufgabe 8: *Definitions- und Wertebreich trigonometrischer Funktionen*

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich und die Asymptoten. Sind die Funktionen gerade, ungerade? Zeichnen Sie die Funktionen.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \arctan(x^2) \qquad \text{(b)} \quad g(x) = \arcsin(\ln(x)) \tag{1}$$

Aufgabe 9: *Winkelbestimmung mittels trigonometrischer Relationen*

Der Cosinuswert zum Winkel $\alpha = 45°$ beträgt $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Berechnen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für die Cosinusfunktion und der Identität $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ die Cosinuswerte zu den Winkeln $\alpha = 22,5°$ und $\alpha = 11,25°$.
Hinweis: Leiten Sie zunächst eine allgemeine Formel her, in der nur $\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha$ vorkommen und lösen Sie diese nach $\cos\alpha$ auf.

Aufgabe 10: *Beweis einiger trigonometrischer Relationen*

Beweisen Sie

$$\text{(a)} \quad \tan(2\alpha) = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha} \qquad \text{(b)} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme.

Aufgabe 11: *Vereinfachen von trigonometrischen Funktionen*

Vereinfachen Sie folgende Formel:

$$\text{(a)} \quad \frac{\cos^2\phi\tan(\frac{\pi}{2} - \phi) - \frac{\cos(-\phi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \phi)}}{\sin(-2\phi)}$$

Die Aufgaben 7,8,9,10 und 11 sind Hausaufgaben.