Universität Ulm
Institut für Theoretische Chemie

Prof. Dr. Axel Groß

Grundvorlesung Theoretische Chemie – Quantenmechanik I

Übungsblatt Nr. 10, 28.01.2009

Die Übungsblätter können heruntergeladen werden von
`http://www.uni-ulm.de/theochem/`
Die Aufgaben werden besprochen in dem Seminar am 04.02.2009

Aufgabe 13: Harmonischer Oszillator
Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator.

a) Benutzen Sie

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle,$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle,$$

um $\langle m|\, x\,|n\rangle$, $\langle m|\, p\,|n\rangle$, $\langle m|\, \{x,p\}\,|n\rangle$, $\langle m|\, x^2\,|n\rangle$ and $\langle m|\, p^2\,|n\rangle$ zu berechnen.

b) Überprüfen Sie, dass das Virialtheorem

$$\left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle = \langle x\nabla V\rangle$$

für die Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie in Bezug auf Energieeigenzustände gilt.

Zusatzaufgabe 14: Harmonischer Oszillator 2
Ein kohärenter Zustand eines eindimensionalen harmonischen Oszillators is definiert ale Eigenzustand des (nicht-hermiteschen) Vernichtungsoperators a:

$$a\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left|\lambda\right\rangle,$$

wobei λ eine i. allg. komplexe Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\left|\lambda\right\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^\dagger}\left|0\right\rangle$$

ein normierter kohärenter Zustand ist.

b) Beweisen Sie, dass ein kohärenter Zustand ein Zustand minimaler Unschärfe ist.

c) Schreiben Sie $|\lambda\rangle$ als

$$\left|\lambda\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\left|n\right\rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Verteilung von $|f(n)|^2$ eine Poissonverteilung bezüglich n ist. Finden Sie den wahrscheinlichsten Wert von n und damit auch von E.

d) Zeigen Sie, dass ein kohärenter Zustand auch erzeugt werden kann durch das Anwenden des Translationsoperators $e^{-\frac{ipl}{\hbar}}$ auf den Grundzustand des harmonischen Operators für eine endliche Verschiebung l, wobei p der Impulsoperator ist.