Institut für Theoretische Chemie:
Prof. Dr. Gerhard Taubmann, Daniela Künzel, Katrin Tonigold, Dorothee Denot

Mathematische Methoden III für Chemie und Wirtschaftschemie

Fr. 10:15 Uhr, H9, 028/2004, O25/346

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` *heruntergeladen werden.*

Übungsblatt 4, verteilt am 7. 11. 2008, Übung am 14. 11. 2008

Aufgabe 1: *Bereichsintegral*

Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int\int xy\,dx\,dy$$

über das vom Kreis $x^2 + y^2 = 4$ und der Hyperbel $x \cdot y = 1$ eingeschlossene, im 1. Quadranten liegende Gebiet.

Aufgabe 2: *Bereichsintegral*

Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int\int\int \frac{dzdydx}{(1+x+y+z)^3}$$

über das Tetraeder zwischen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Aufgabe 3: *Volumenintegral*

a) Berechnen Sie das Volumen des Raumstücks, welches den beiden Zylindern $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + z^2 = 1$ gemeinsam ist.
b) Es sei $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
Berechnen Sie das Volumenintegral dieser Funktion in dem in Aufgabe a) angegebenen Raumstück.

Aufgabe 4: *Linienintegral*

Berechnen Sie den Wert des Linienintegrals (=Kurvenintegrals)

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \left[\frac{1-y^2}{(1+x)^3}dx + -\frac{y}{(1+x)^2}dy\right]$$

längs der Geraden $y = x$.

Aufgabe 5: *Linienintegral*

Berechnen Sie die Kurvenintegrale folgender Funktionen, wobei die Kurve C entlang des Dreiecks von (0,0) nach (1,0) nach (0,1) und wieder zu (0,0) verläuft:

(a) $\oint_C (x+y)ds$ (b) $\oint_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$ (c) $\oint_C (xdx + ydy)$ (d) $\oint_C (xydx + xdy)$ (e) $\oint_C (x+y)dx$

Geben Sie zuerst die Parametrisierung des Weges an: Wie lauten $\vec{\gamma}_1(t)$, $\vec{\gamma}_2(t)$, $\vec{\gamma}_3(t)$? Hinweis:

- Es sei $\vec{\gamma}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der mittels $t \in [a, b]$ parametrisierte Ortsvektor eines stückweise stetig differenzierbaren Weges der vom Anfangspunkt $\vec{\gamma}(a)$ bis zum Endpunkt $\vec{\gamma}(b)$ führt.
- Kurvenintegral 1. Art (die Funktion f ist eine Zahl, kein Vektor): $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))|\dot{\vec{\gamma}}(t)|dt$.
- Kurvenintegral 2. Art (nun ist $\vec{f}$ ein Vektor): $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt$.
- Neben diesen Integralen gibt es noch solche, die nicht an der *direkten* Fläche unter der Funktion entlang des Weges interessiert sind, sondern nur an der Projektion dieser Fläche auf eine der Ebenen, die von jeweils einer Koordinatenachse und der Funktionswertachse gebildet werden, z.B. an $\int_C f(x, y)dx = \int_C f(x, y(x))dx = \int_C f(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}dt$ oder an $\int_C f(x(y), y)dy$.