

Vorkurs

Mathematik f. Chemiker

BLOCK I

1. Kürzen und Erweitern von Brüchen; Zerlegung in Faktoren.
 Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in möglichst viele Faktoren.
Beispiel: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

(1) $a^4 - b^4$	(6) $9c^2 - 36c + 32$
(2) $x^4 - 81$	(7) $x^3 - y^3$
(3) $\frac{c^4}{81} - \frac{x^4}{16}$	(8) $8b^3 + 125$
(4) $n^2 + 6n - 16$	(9) $3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$
(5) $x^2 - x - 6$	(10) $x^4 + x^3 + 2x + 2$

2. Vereinfachen sie die nachfolgenden Brüche durch Kürzen oder Dividieren.
Beispiel: $(15x^2 - 4x - 96) : (3x - 8) = 5x + 12$

(11) $\frac{12a^2 - 2ab - 24b^2}{6a + 8b}$	(13) $\frac{\frac{8}{3}a^4 + \frac{16}{15}a^2b^2 - \frac{6}{5}b^4}{\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{5}b^2}$
(12) $\frac{24x^2 + 73xz + 24z^2}{8x + 3z}$	(14) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$
(15) $\frac{81x^8 - 16z^4}{3x^2 + 2z}$	(18) $\frac{1 - x - 3x^2 - x^5}{1 + 2x + x^2}$
(16) $\frac{1 - x^2 - 4xy - 4y^2}{1 - x - 2y}$	(19) $\frac{(x^2 - y^2)^2 \cdot (x + y)^2}{(x^6 - y^2x^4)^4}$
(17) $\frac{18 + 3a - 58a^2 + 35a^3}{3 + 4a - 5a^2}$	
(20) $\frac{(x^3 - yx^2)^5 \cdot (x^6 + x^5y)^5}{(x^2 - xy)(x^3 - x^2y)^3 (x^4 + yx^3)^2(x^7 + yx^6)}$	

3. Berechnen Sie x.

Beispiel: $\frac{2x - 10}{x + 5} = 2 - \frac{8}{x + 2} ; x = 0$

(21) $\frac{2x}{1 - x} - \frac{2}{x - 1} = \frac{2x^2 - 6x}{1 - x^2} - \frac{8}{x + 1} ; x = ?$

$$(22) \quad \frac{14-3x}{2x+4} - \frac{7}{6} = \frac{x^2-6x+2}{4-x^2} + \frac{5x}{6-3x} \quad ; \quad x = ?$$

$$(23) \quad \frac{3x+3}{2x-16} - 4 + \frac{2x+2}{x-8} = \frac{3(x-1)}{x-8} \quad ; \quad x = ?$$

$$(24) \quad \frac{a+n}{(x-n) \cdot x(a-x)} = \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-n} \right) \cdot \frac{1}{a-n} \quad ; \quad x = ?$$

$$(25) \quad \frac{10a-35b}{6x^2-x-1} = \frac{6a-10b}{4x-2} - \frac{2a-1,5b}{1,5x+0,5} \quad ; \quad x = ?$$

BLOCK III

Logarithmieren, Potenzieren

3.1

Nomenklatur: lg : Logarithmus zur Basis 10
 ld : Logarithmus zur Basis 2
 ln : Logarithmus zur Basis e
^a log ~~l~~ogarithmus von b zur Basis a

Die folgenden Ausdrücke sind unter Verwendung der Logarithmengesetze zu berechnen bzw. umzuformen.

Beispiel: $\ln(ax^2) = \ln(a) + \ln(x^2) = \ln(a) + 2\ln(x)$
 $\lg a + 2 \lg b = \lg(ab^2)$

1. $10^{\lg 1000}$

3. $10^{\lg(10^{-3})}$

5. $(\lg 10)^{10}$

7. $(\ln e) e^4$

9. $2^{\lg 2}$

11. $e^{\ln 57}$

2. $\lg \sqrt{a \cdot 6}$

4. $\ln \left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{c}} \right)$

6. $\lg (18) - \lg (9)$

8. $\lg \frac{4\pi r^3}{3}$

10. $\lg 2 + \lg 8$

12. $2 \lg 3$

13. $\ln (e \cdot e^4)$
 15. $\ln (3^x 5^x)$
 17. $\lg \frac{q^n - 1}{q - 1}$
 19. $\text{ld} (a^7 - b^7)$
14. $\frac{\ln (e^2)}{2}$
 16. $\lg \frac{a^5 b^3}{x^3 y^5}$
 18. $\ln \left(\frac{\sqrt[5]{a+b}}{\sqrt{a-b}} \right)$
 20. $\frac{1}{2} (\lg x + \lg y) - \frac{1}{3} \lg x + \frac{1}{4} \lg y$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

Beispiel: $4^{3x} 5^{2x-3} = 6^x; \quad x = \frac{3 \ln 5}{3 \ln 4 + 2 \ln 5 - \ln 6}$

21. $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg (3 - x)$
 22. $\sqrt[3]{a^{x+2}} = \sqrt[2]{a^{x-5}}$
 23. $\frac{c^{x^2} d^{(x^2-1)}}{e^{x^2}} = 1$
 24. $2^{x+1} + 3^{x-3} = 3^{x-1} - 2^{x-2}$
 25. $e^5 e^{x-8} e^{x^2} = e^{-x}$
 26. $13^{x-1} + 15^{x+1} = (8+5)^x + 3(7+8)^x$
 27. $\sqrt[x]{2} = 10^x$
 28. $e^{\ln x} = 10^{\lg y}$
29. Leiten Sie eine Gleichung zur Umwandlung von $\lg y$ in $\ln y$ her, welche die Form hat: $\lg y = A \ln y$
 Verwenden Sie die Gleichung in Aufgabe (28.). Wie lautet A?
30. Leiten Sie analog zu Aufgabe (29.) eine Gleichung zur Umwandlung von ${}^a \log x$ in ${}^b \log x$ her.
31. $e^{\lg x} = 10^{\ln y}$
 (*Hinweis: im Endergebnis soll y nicht im Exponenten erscheinen!*)
32. $2^{\text{ld} x} = e^{\lg y}$

$$33. (2^{3-x})^{2-x} = 1$$

$$34. \sqrt[x-3]{32^{x+17}} = \sqrt[x-7]{(0,25 \cdot 128)^{x+5}}$$

$$35. 81^{\left(\frac{x+2}{x+12}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$36. \sqrt[4]{b^{x-a}} = \sqrt[5]{b^{x+a}}$$

Berechnen Sie x und y jeweils aus den beiden angegebenen Gleichungen.

$$37. 100^y 10^x = 1000000000000 \quad \text{und} \quad x + y = 9$$

$$38. 8^y 16^x = 1024 \quad \text{und} \quad x^3 y^5 = 32$$

(x, y ganze Zahlen)

$$39. 9^y 3^{2x} = 3^6 \quad \text{und} \quad 4^y 8^x = 256$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$40. \sqrt[3]{\sqrt{729}}$$

$$41. \sqrt[a]{\sqrt{x a^3}} : \sqrt[a x]{a^2}$$

$$42. x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{6}} \sqrt[12]{x^{-18}}$$

$$43. \sqrt[5]{b^{n+5}} + 3b \sqrt[5]{b^n}$$

$$44. 2^{a+1} \sqrt{b^{4a^2-1}}$$

$$45. \sqrt{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2} \cdot \sqrt[a-b]{x^{a^2-2ab+b^2}} \quad 49.$$

$$46. \sqrt[5]{\sqrt{x^5}} + 3\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$$

$$47. \frac{\sqrt[a-b]{x^{a^2-2ab+b^2}}}{\sqrt[a+b]{x^{a^2+2ab+b^2}}}$$

$$48. \frac{16\sqrt{a^6 b^7}}{\sqrt[4]{a^4 b^5}}$$

$$a^{x+bx} \sqrt{(c+d)^{a+b}} + a^{x-bx} \sqrt{(c+d)^{a-b}}$$

$$50. \sqrt[3]{40 + 16\sqrt{4x+5}} = \sqrt[3]{12\sqrt{16x+20}}; \quad x = ?$$

3.2 Vermischte Aufgaben

Man löse nach x auf:

$$1. \frac{14\sqrt{x}-6}{2\sqrt{x}+2} = 5$$

$$2. \sqrt{x^2-4x+6} = x+2$$

$$3. \sqrt[3]{4\sqrt{4x-1}-3} = \sqrt[3]{\sqrt{4x-1}+6}$$

$$4. x+4 = \sqrt{8x+32}$$

$$5. x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$6. \frac{45}{x} = \frac{x}{5}$$

$$7. (a^2 - b^2)(a - b) = ax^2 + bx^2$$

$$8. \sqrt{5x-56} = \sqrt{x+12} - \frac{10}{\sqrt{x+12}}$$

Bestimmen Sie alle Werte für x und y, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

$$9. \frac{y}{2} = \frac{3}{4}x \quad \text{und} \quad xy = 54$$

$$10. 3x^2 4y^2 = 17 \quad \text{und} \quad 3y^2 + 4x^2 = 18$$

$$11. \frac{15}{3x+9} + \frac{4}{2y-2} = 2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{4y} = \frac{1}{4}$$

BLOCK IV

Differentiation

4.1 Algebraische Ausdrücke

$$1. y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5 ; y' = ?$$

2. $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$; $y' = ?$
3. $y = 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}}$; $y' = ?$
4. $y = \sqrt[3]{3x^2}$; $y' = ?$
5. $s = (t^2 - 3)^4$; $\dot{s} = ?$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$; $f'(x) = ?$
7. $y = \frac{3 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = ?$
8. $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{(1 - 5x)^6}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = ?$
9. $y = (x^2 + 3)^4 (2x^3 - 5)$; $y' = ?$
10. $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$; $y'' = ?$
11. $y = \left(\frac{1}{x^2 - 9}\right)^{\frac{1}{2}}$; $y'' = ?$
12. $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^4 - 4}$; $y' = ?$
13. $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x}}$; $y' = ?$
14. $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$; $y' = ?$
15. $x = \frac{t^3 + 2t^5}{t^4}$; $\ddot{x} = ?$
16. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; $y' = ?$

$$17. y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad ; y' = ?$$

$$18. y = \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad ; y' = ?$$

$$19. y = \frac{(a^2-2x)^3}{(a+\sqrt{2x})^3} \quad ; y' = ?$$

$$20. y = \frac{2x+3}{4x^2+12x+9} \quad ; y' = ?$$

4.2 Trigonometrische Funktionen

Bilden Sie die erste Ableitung

$$1. y = \sin x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$$

$$2. y = \cos(1-x^2)$$

$$3. y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$$

$$4. y = \sin^3(2x-3)$$

$$5. y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2x \sin x$$

$$6. y = x \cos\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)$$

$$7. y = \frac{1}{x} \cot(x^2)$$

$$8. y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$$

$$9. y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$10. y = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x$$

$$11. y = 2 \sin^3 \sqrt{\frac{3}{x}}$$

$$12. y = \frac{3 \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$13. y = \frac{\sin^2 x}{\cos^7 x} - \frac{2}{5 \cos^5 x}$$

$$14. y = \tan^4(\sqrt{x})$$

$$15. y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin 2x}$$

$$16. y = 4 \cos^5 \frac{x}{4}$$

$$17. y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$$

$$18. y = \cos^2 \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$19. y = \tan x + \cot x$$

$$20. y = \sin^2 x + \cos^2 x$$

4.3 Logarithmische Ausdrücke, Exponentialfunktionen

$$1. y = \ln [(x^3 + 2)(x^2 + 3)] \quad ; y' = ?$$

$$2. y^2 = \ln \left[\frac{x^4}{(3x - 4)^2} \right] \quad ; y' = ?$$

$$3. y = \ln (\sin 3x) \quad ; y' = ?$$

$$4. y = \ln [x + \sqrt{1 + x^2}] \quad ; y' = ?$$

$$5. y = \exp \left[- \frac{(x^2 - 2x + 1)}{x - 1} \right] \quad ; y' = ?$$

$$6. y = x^2 3^2 \quad ; y' = ?$$

$$7. y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \quad ; y' = ?$$

$$8. y = e^{-x} \ln x \quad ; y'' = ?$$

$$9. y = a^{3x^2} \quad ; y' = ?$$

$$10. y = e^{-2x} \sin 3x \quad ; y' = ?$$

$$11. y = e^{-x^2 \sin x} \quad ; y' = ?$$

$$12. y = e^{5x^2 - 3x + 1} \quad ; y' = ?$$

$$13. y = x^x \quad ; y' = ?$$

$$14. y = x^{\ln x} \quad ; y' = ?$$

$$15. y = x^{\exp(-x^2)} \quad ; y' = ?$$

$$16. y = e^{\ln 3x^2} \quad ; y'' = ?$$

$$17. y = x^2 e^{2x} \sin x \quad ; y' = ?$$

$$18. y = \ln [\ln (\ln x)] \quad ; y' = ?$$

$$19. y = x^{(x^x)} \quad ; y' = ?$$

$$20. y = (x^x)^x \quad ; y' = ?$$

4.4 Kombinationen verschiedener Funktionen

Bilden Sie die erste Ableitung

1. $y = x^2 e^{-x^2} \sin x$

2. $y = e^{-\frac{x^4-1}{x^2-1}} \sin x$

3. $y = \frac{e^{-x^2}}{x \cos x}$

4. $y = \frac{1}{2} (\cos^2(x) - 1) e^{-x^4}$

5. $y = (\ln x) e^{-3x^2}$

6. $y = \sin(x) \cos^2(x) e^{-4x^6}$

7. $y = (\cos x)^{\cot x}$

8. $y = \ln \left[\frac{a + b \tan x}{a - b \tan x} \right]$