



Was hat Mathematik mit Knochen zu tun?

*Dr. Ulrich Simon, Beate Mayer
Volker Eberle, Fabrice Bacquele, Jonas Schwer*

Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen
www.UZWR.de

Programm:

- Biomechanik der Knochen
- Biomechanik des Bewegungsapparats
- Grundlagen Balkenbiegung (Mechanik)
- **Experimente (Balkenbiegung)**
- Erklärung Finite-Elemente-Methode, FEM (Mathe)
- **Computerübung mit ANSYS (FEM-Software)**
- **Studentenprojekt: Jonas Schwer, Knochenumbau**



Scientific Computing Centre Ulm

University News | University | Faculties | Research | Study | International | Continuing Education | Campus

ulm university universität uulm

uzwr

Ulmer Zentrum für
Wissenschaftliches Rechnen




uzwr

[> UZWR](#)

- Home
- News
- People and Organisation
- Teaching and Studies
- Research and Projects
- Industrial Cooperations
- Events
- Hardware and Software
- Downloads
- Contact and Location
- Links
- Intern (Zugang beschränkt)

Studiengang: CSE



- Bachelor CSE
- Master CSE

Scientific Computing Centre Ulm

The Scientific Computing Centre Ulm [German: Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (UZWR)] is an interdisciplinary research focus of the University of Ulm.

OUR NAME:
Scientific Computing means -> Applied Computing

Application-oriented research questions from different research fields as well as from industry will be solved using advanced numerical methods.

OUR MOTTO:
"We simulate everything: from Bone Healing to Ship Propulsion!"

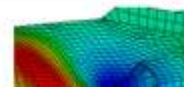
We also have → educational programs.

We stay in close contact with all faculties of the University of Ulm (see also → List of members) and with the → Chamber of Commerce and Industry of Ulm.


OUR SPECIAL SUBJECT:
→ Cooperations with smaller local companies!


Overview of our services


- Mathematical, numerical and stochastic computations
- Numerical Simulations and optimizing
- Strength analysis



News

 **04.05.2016**
10. Forschungsseminar
Wissenschaftliches
Rechnen [more]

 **28.04.2016**
GirlsDay 2016: Auch im
UZWR [more]

 **13.11.2015**
10 Jahre UZWR! [more]

... more news

Contact

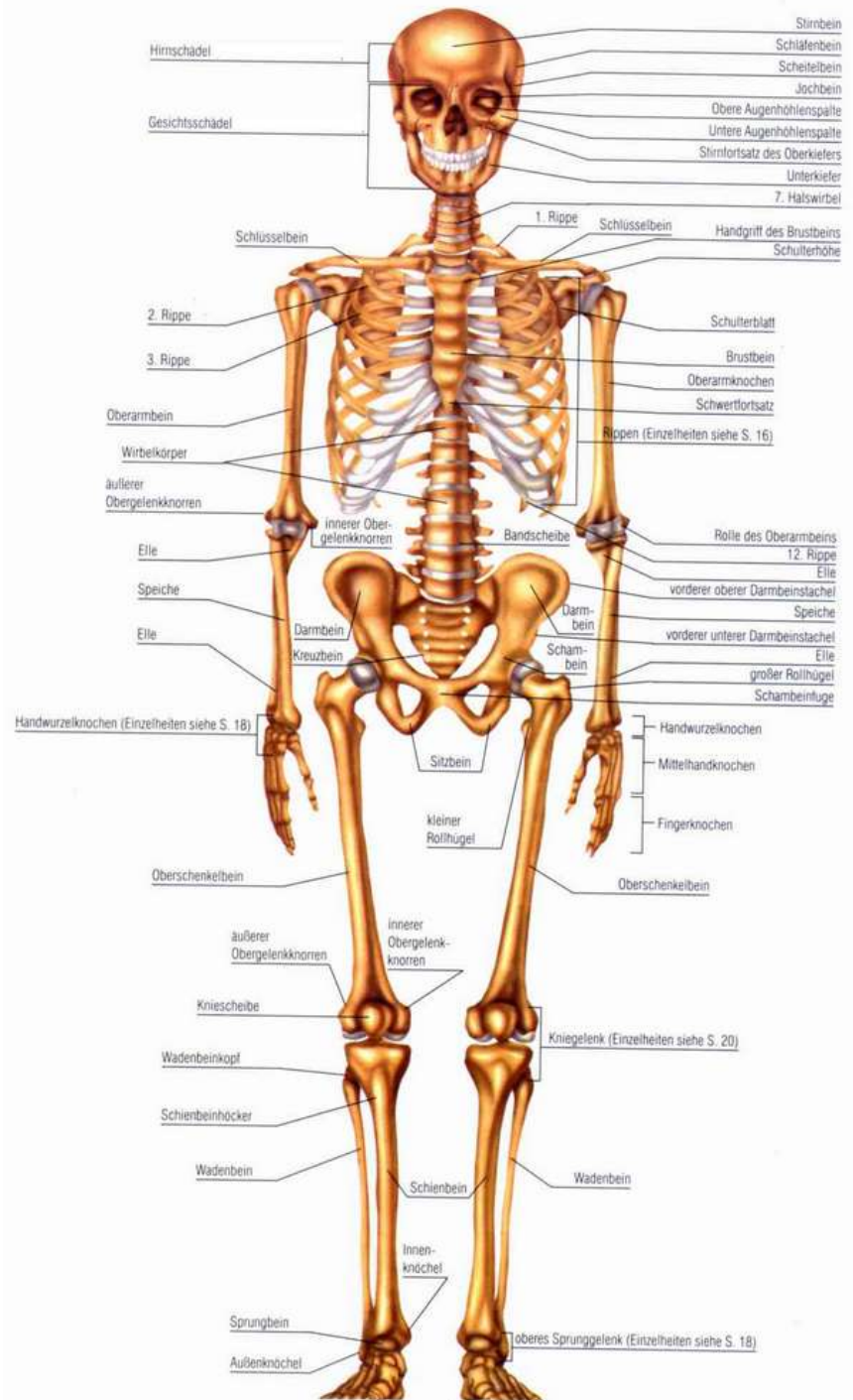
Scientific Computing Centre Ulm

Biomechanik der Knochen

Knochen:

Aufgaben

- Tragen/Stützen
- Bewegung ermöglichen
- Kalziumspeicher



Knochenbau-Prinzipien:

Roux (1895) und Wolff (1892):

„Funktionelle Anpassung“

→ Knochen nur dort und soviel gebraucht wird

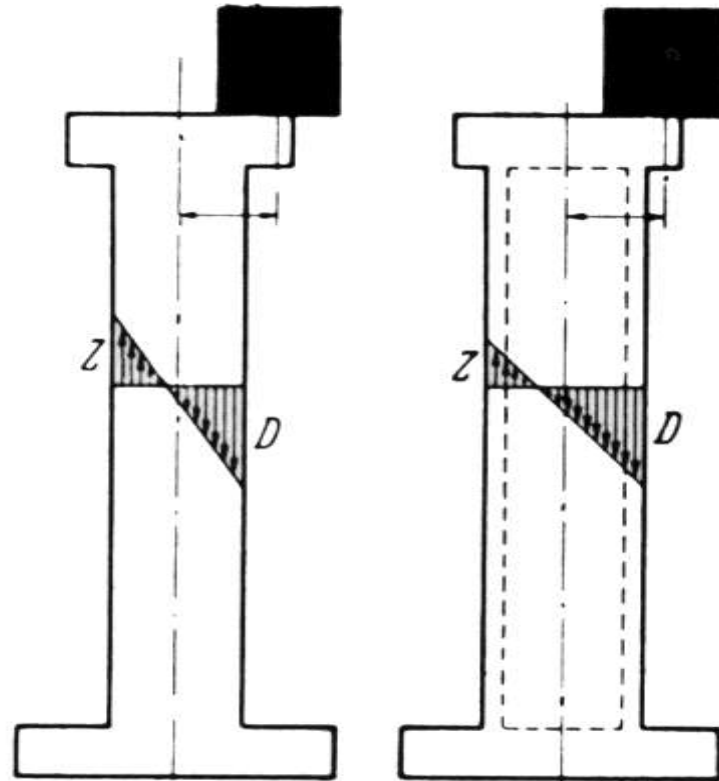
Pauwels (1965):

„Minimum-Maximum-Prinzip“

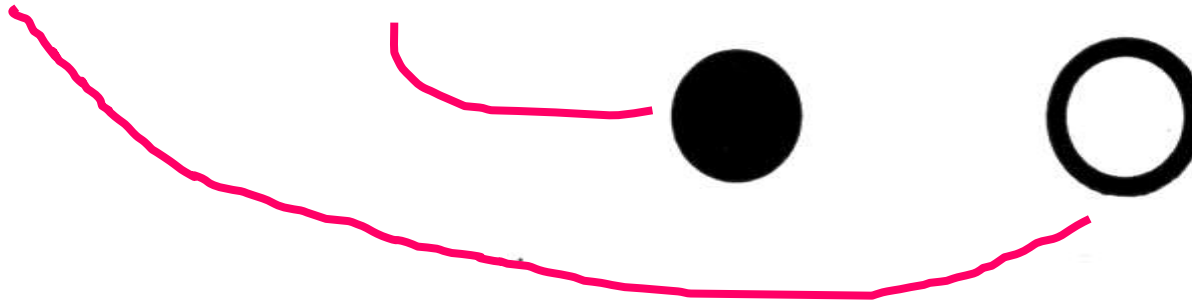
→ Minimaler Aufwand (Kalzium, Energie), maximale Steifigkeit/Festigkeit

Beispiel:

Röhrenknochen

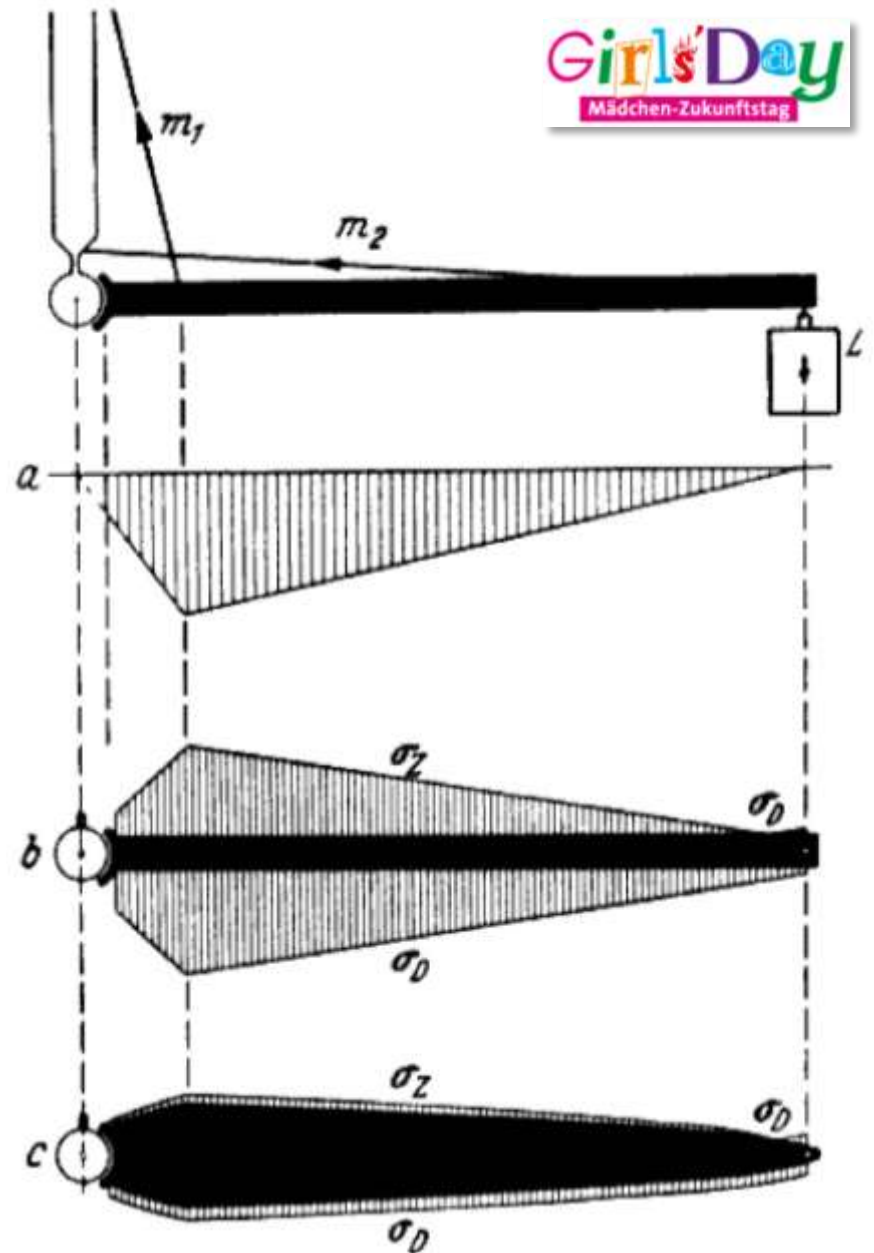


→ Röhre besser als Vollstab!



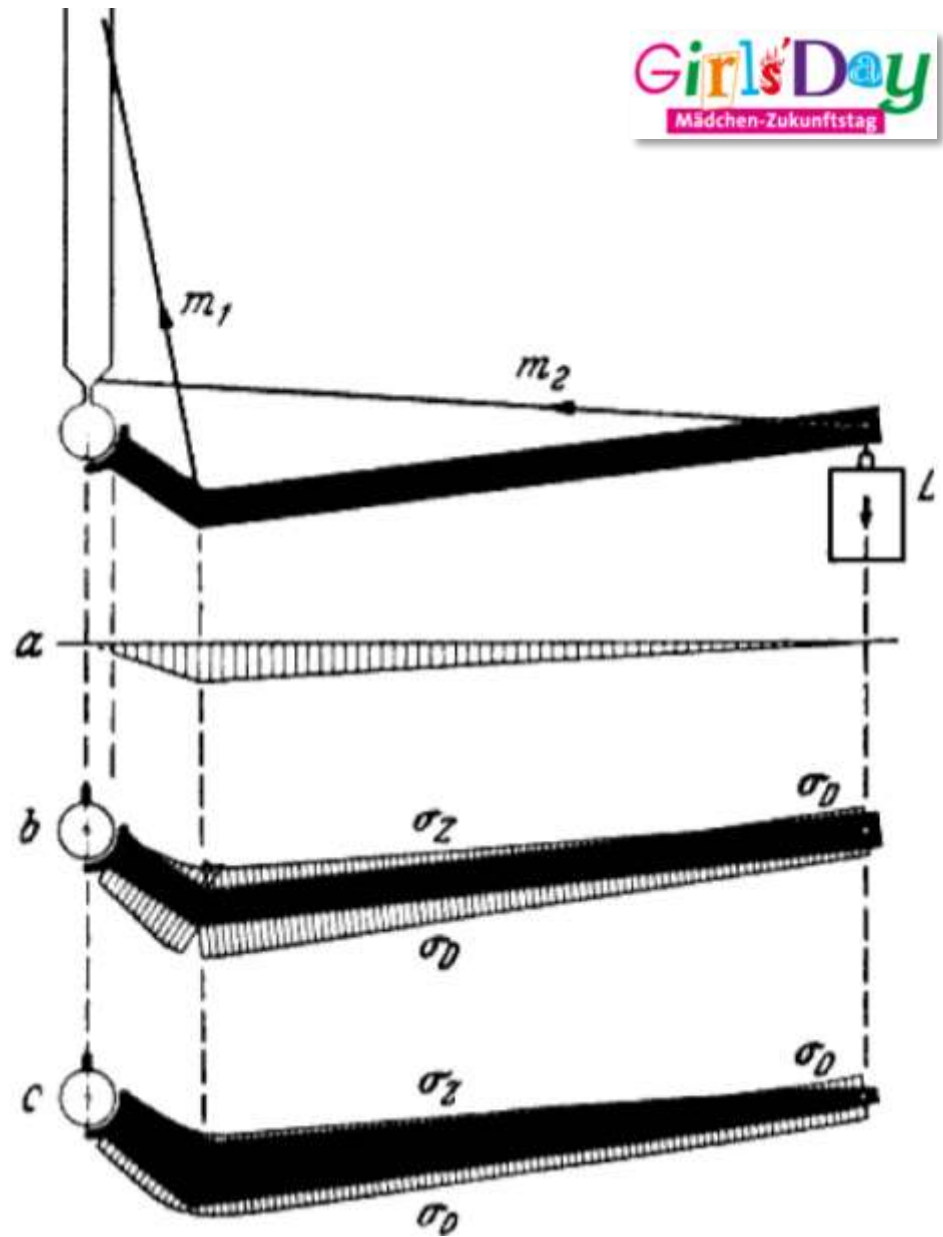
Beispiel:
Angepasster
Querschnittsverlauf

→ Knochenquerschnitt an Biegemomentenverlauf angepasst.

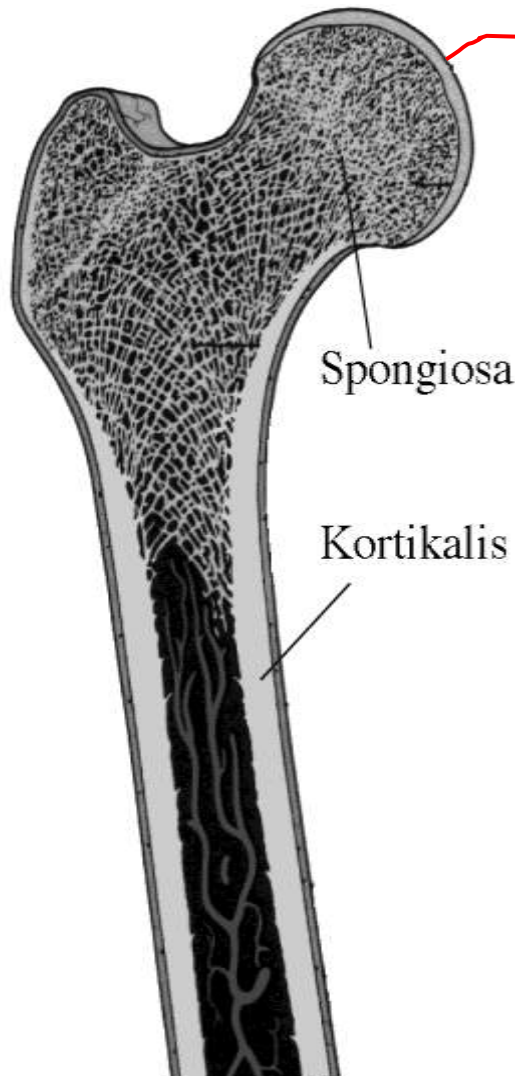


Beispiel: Schaftkrümmung

→
Knochenachsen werden so
gekippt, dass hauptsächlich
Druckbelastung.

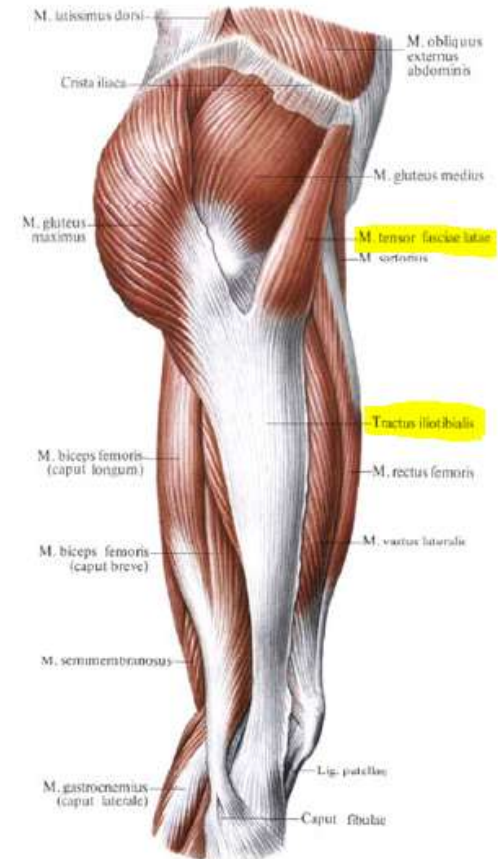
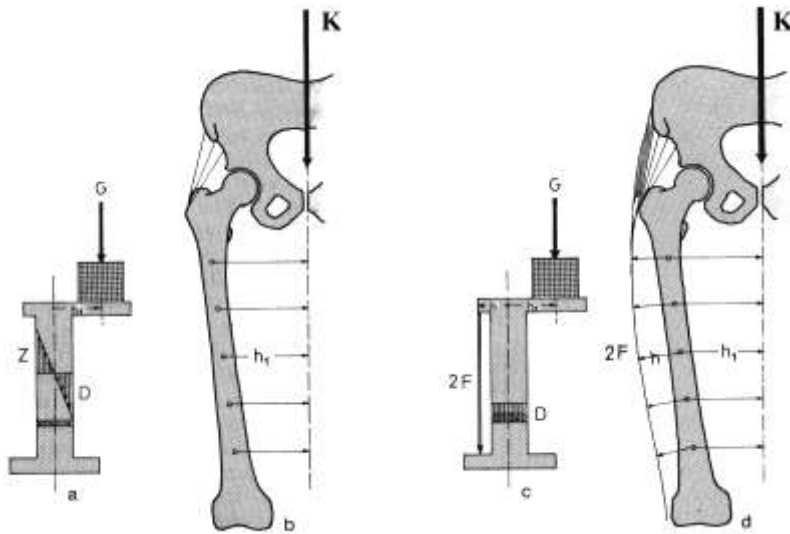


Beispiel: Spongiöser Knochen



- Knorpel erfordert große Fläche.
- Epiphysen habe größeren Durchmesser.
- Spongiöser (trabekulärer) Knochen
- Kompakter Knochen wäre hier Materialverschwendung (vgl. Sandwichplatte).

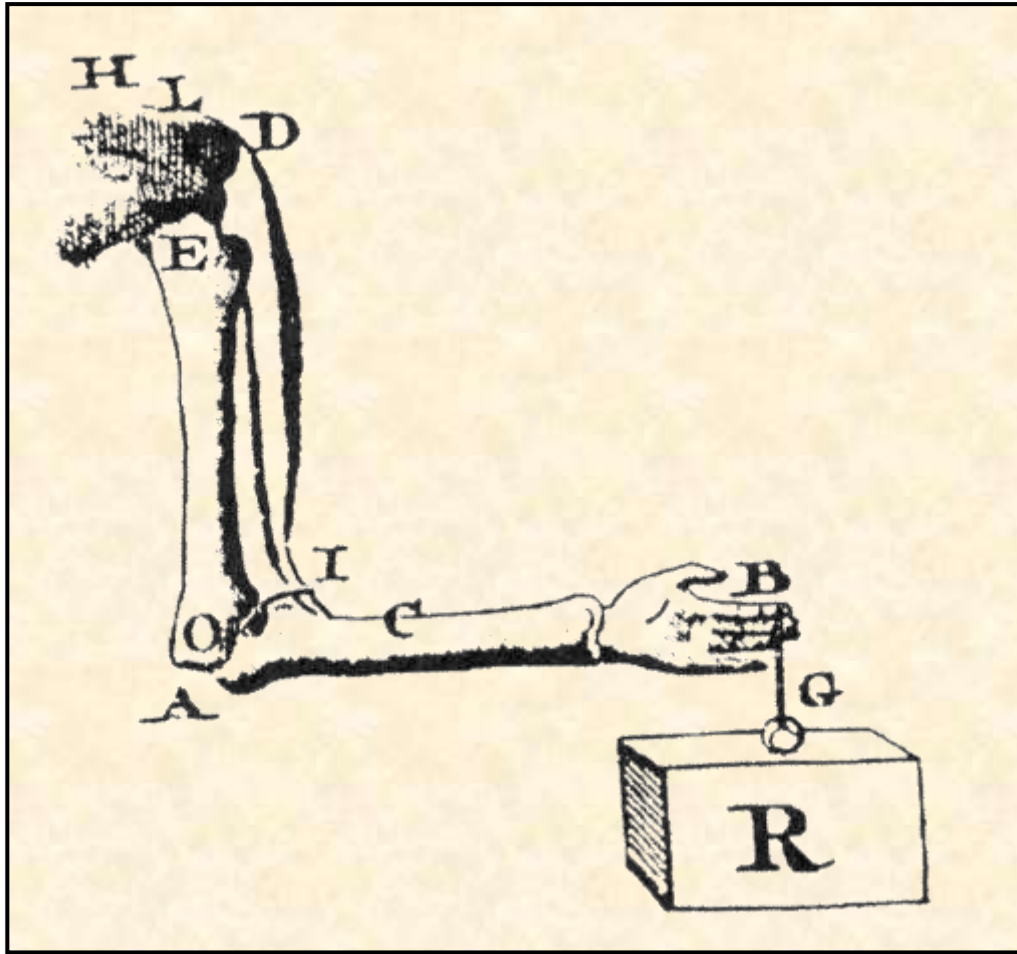
Beispiel: Zuggurtung



- Knochen „mag“ keine Zugspannungen
- Zug wird von Bändern (Zuggurtung) übernommen (vgl. Stahlbeton)

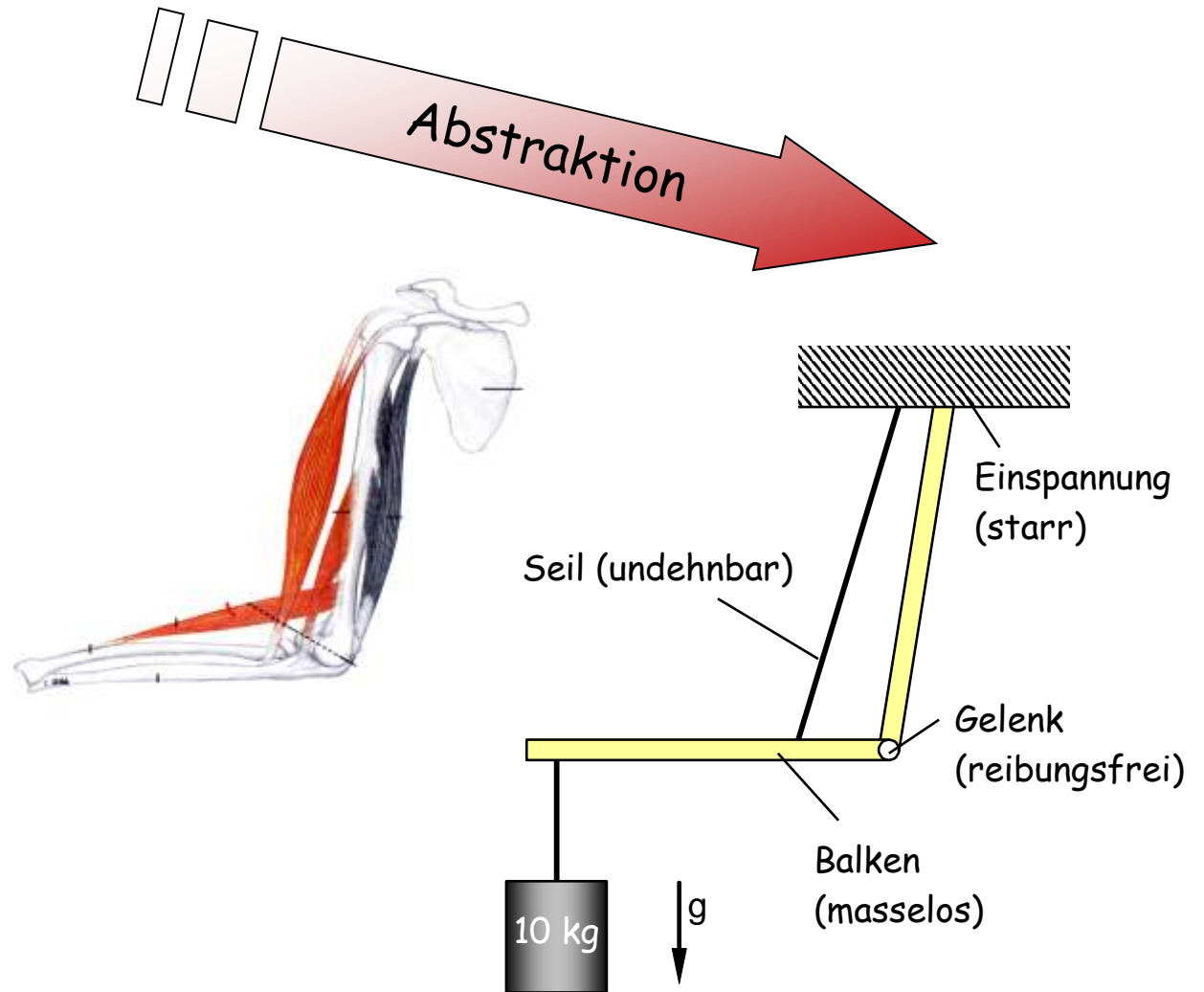
Biomechanik des Bewegungsapparates

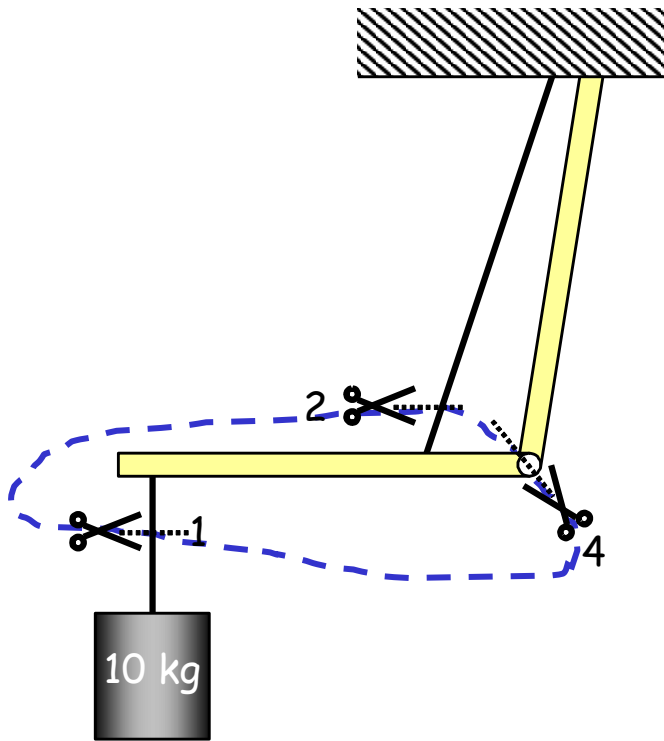
Historisches Beispiel: "Bizeps-Kraft"



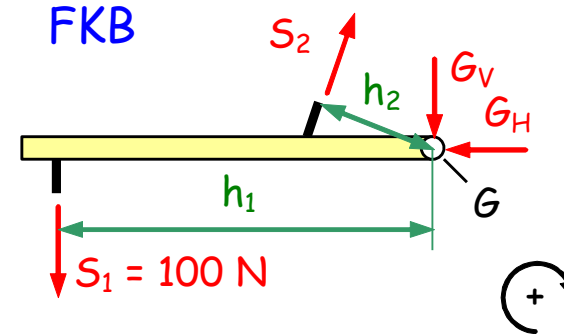
Aus:
„De Motu Animalium“
von
G.A. BORELLI
(1608-1679)

Modellbildung





Freischneiden



Gleichgewicht

Summe aller Momente bezügl. Punkt $G = 0$

$$\begin{aligned}
 -S_1 \cdot h_1 + S_2 \cdot h_2 & \stackrel{!}{=} 0 \\
 -100 \text{ N} \cdot 35 \text{ cm} + S_2 \cdot 5 \text{ cm} & \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow S_2 & = 100 \text{ N} \cdot \frac{35 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \underline{\underline{700 \text{ N}}}
 \end{aligned}$$

→ Das ist das siebenfache der Last!

Gewichtskraft :

$$S_1 = m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ N/kg}$$

$$S_1 \approx 100 \text{ N}$$

Grundlagen Balkenbiegung

Spannungen

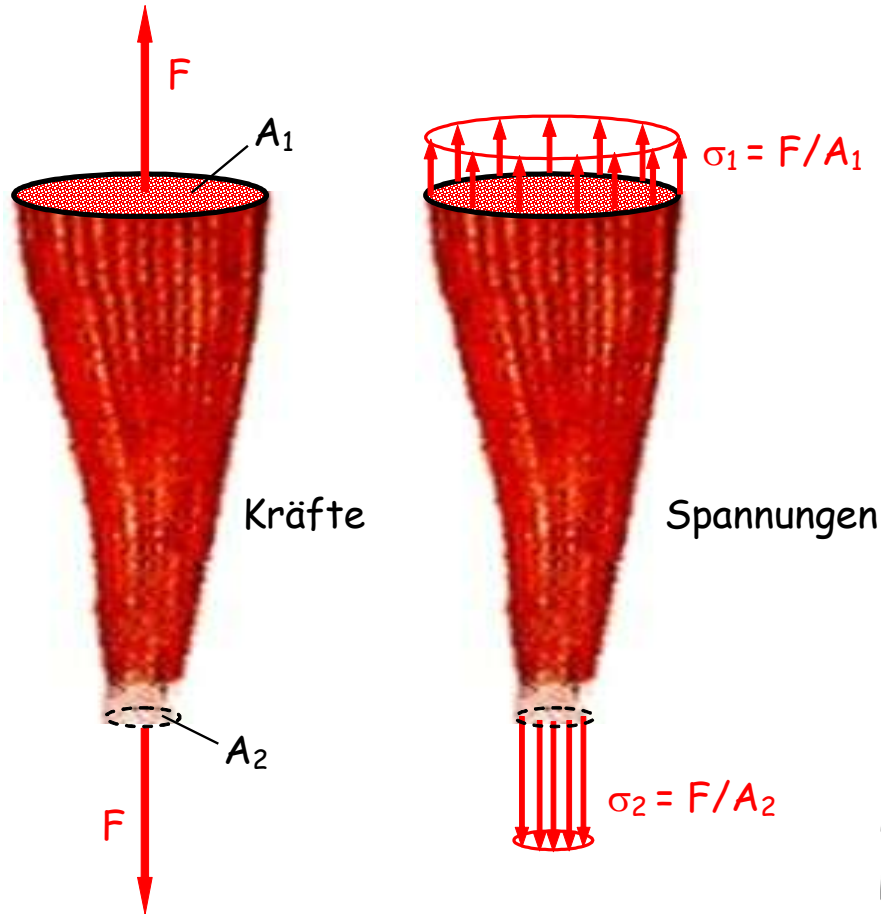


Zum Merken:

Spannung = „verschmierte“ Schnittkraft,

Spannung = Kraft pro Fläche oder $\sigma = F/A$

Beispiel: Spannungen im Muskel



Einheit der Spannung

Mega-Pascal: $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$

Pascal: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Einfache Balkentheorie

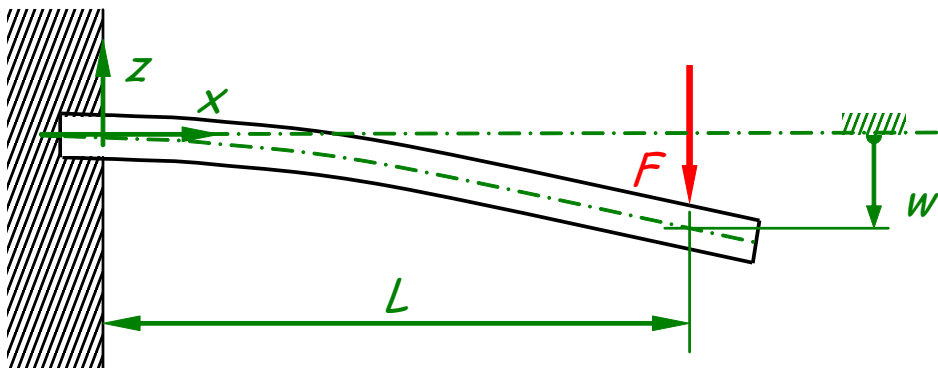


Kragbalken mit
 E Werkstoffsteifigkeit,
 L Länge,
 I Flächenmoment

Spannung

$$\sigma(x, y) = \frac{(L-x) \cdot z}{I} F$$

$$\sigma_{\max} = \frac{L \cdot D/2}{I} F$$

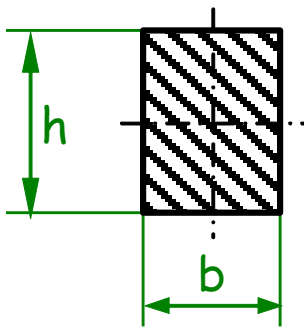


Absenkung

$$w = \frac{L^3}{3EI} F$$

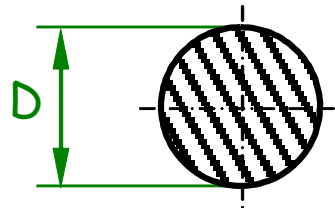
Flächenmoment I:

Rechteck:



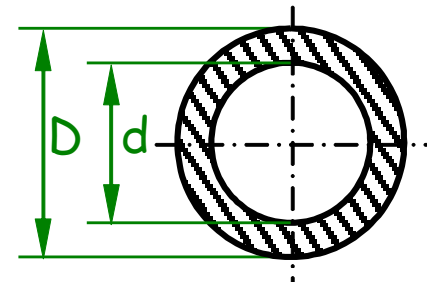
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Vollkreis:



$$I = \frac{\pi}{64} D^4$$

Rohr:



$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

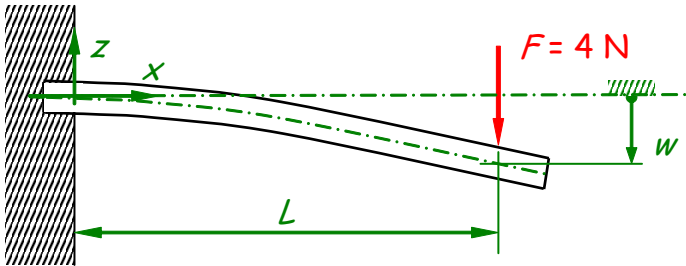
Experimente zur Balkenbiegung

Experimente

Masse: $m = \frac{F}{g} = \frac{F}{9,81 \text{ N/kg}} = \dots$

Absenkung: $w = \frac{L^3}{3EI} F = \dots$

$E_{\text{Alu}} = 70.000 \text{ MPa}$



$I = \dots$			w bei ...	
			$L = 70 \text{ mm}$	$L = 35 \text{ mm}$
	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{\pi}{64} D^4$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	Messung Rechnung Simulation		

Finite-Elemente-Methode, ganz einfach erklärt!

FEM: Erklärung in einem Satz

Numerische Mathematik:

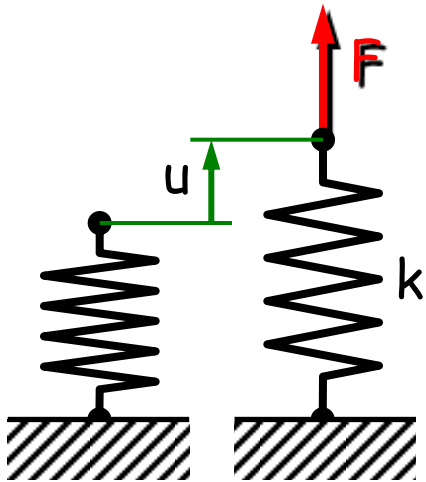
Numerisches Verfahren

zur näherungsweise Lösung von

partiellen Differentialgleichungen

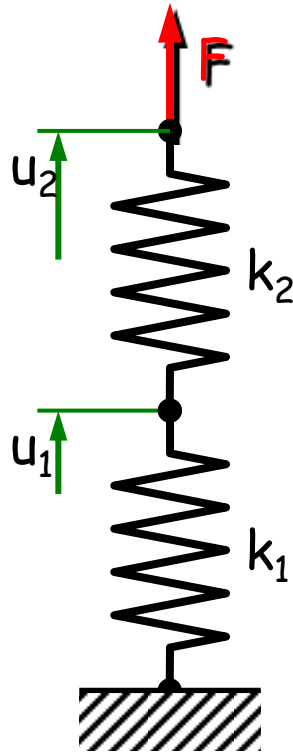


FEM:



$$k \cdot u = F$$

$$u = \dots$$

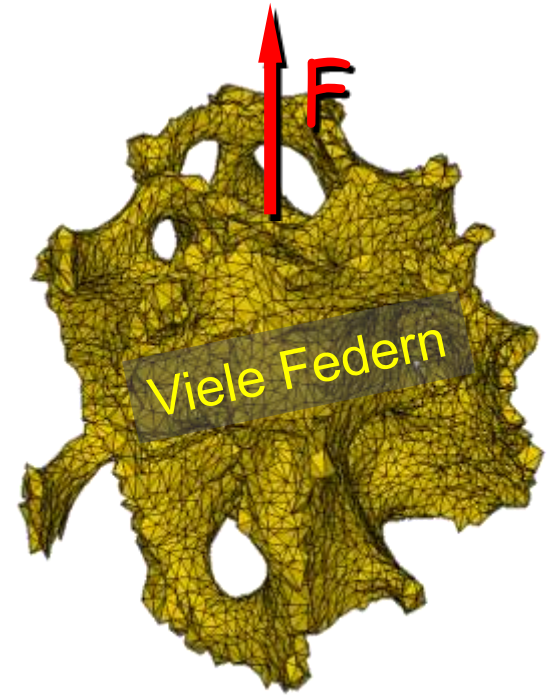


$$k_1 u_1 = k_2 (u_2 - u_1)$$

$$k_2 (u_2 - u_1) = F$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

$$\underline{u} = \dots$$



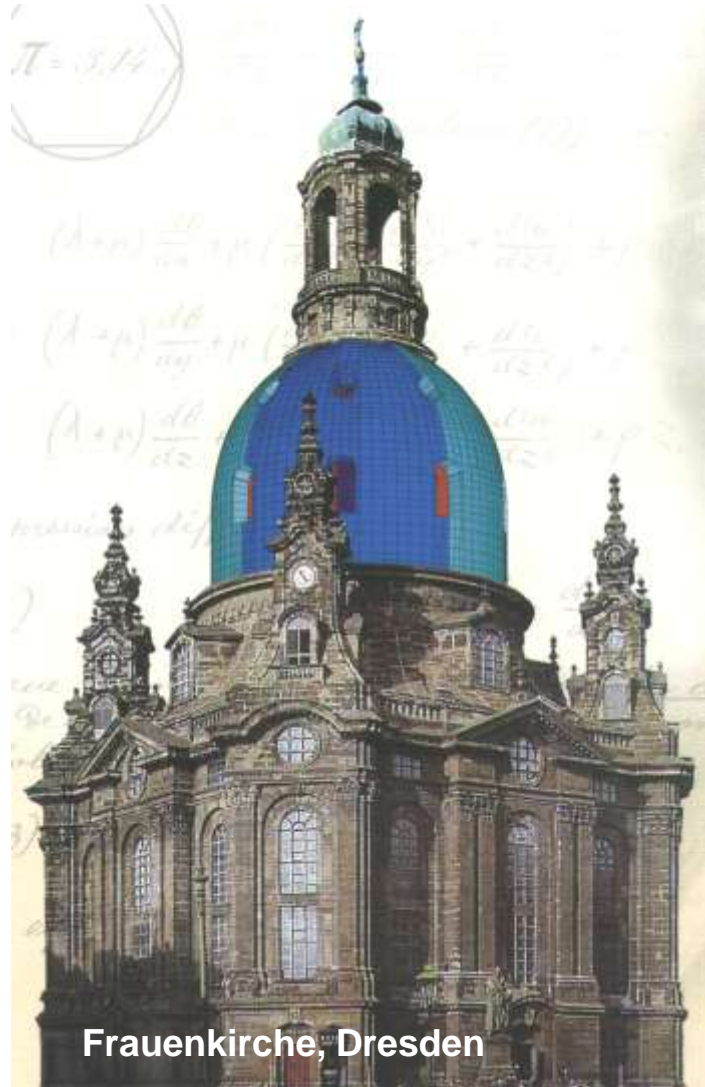
FE-Software

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u} = \underline{F}$$

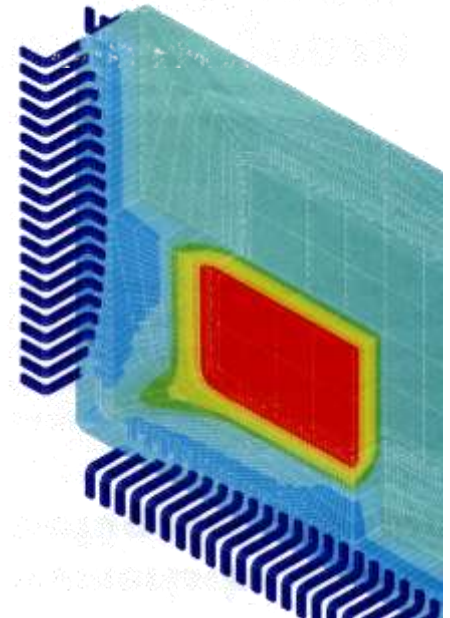
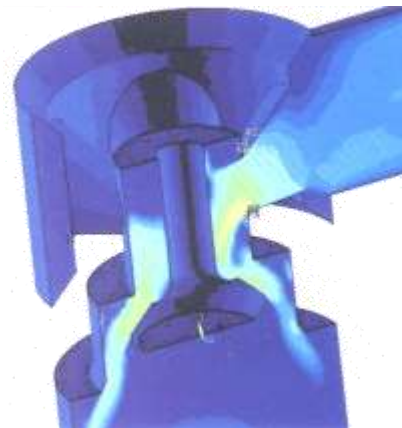
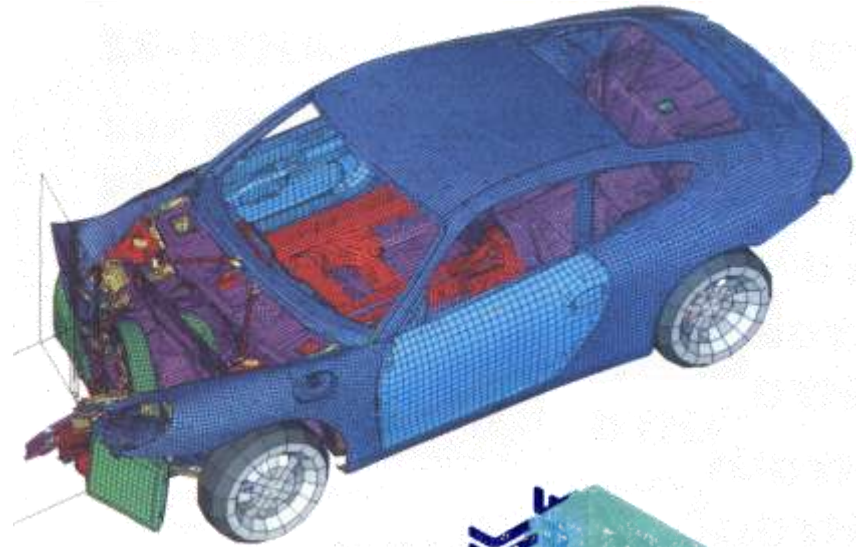
FE-Software

$$\underline{u} = \dots$$

FEM - Anwendungen

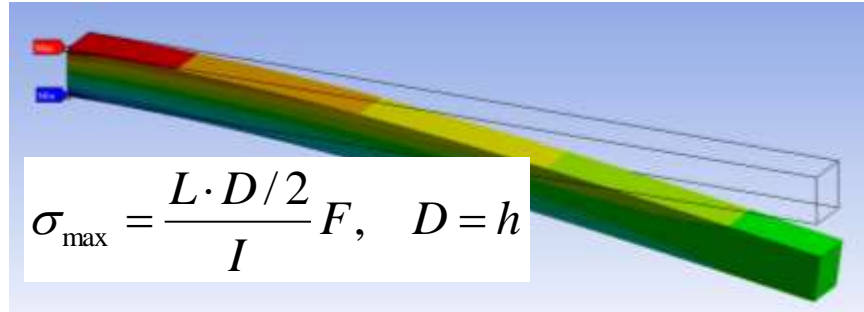
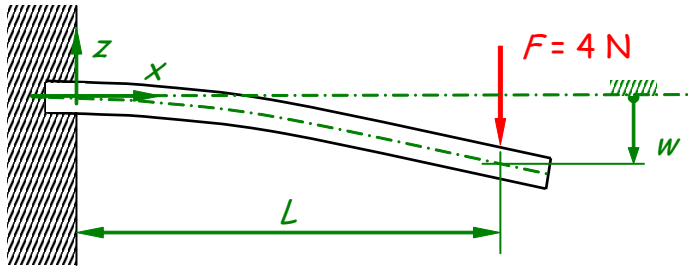


Frauenkirche, Dresden



Computerübung mit ANSYS

ANSYS



$$\sigma_{\max} = \frac{L \cdot D/2}{I} F, \quad D = h$$

$$E_{\text{Alu}} = 70.000 \text{ MPa}$$

	$I = \dots$		w bei ...	
			$L = 70 \text{ mm}$	$L = 35 \text{ mm}$
	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{\pi}{64} D^4$	Messung Rechnung Simulation		
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	Messung Rechnung Simulation		

Studentenprojekt

Jonas Schwer: „Knochenumbau“