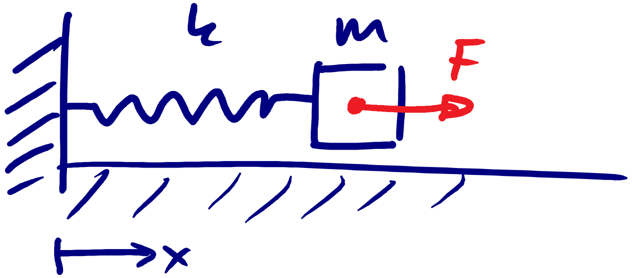
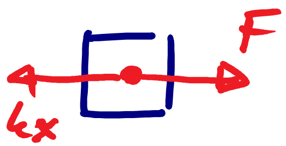
# Statik

$$Ku = F$$

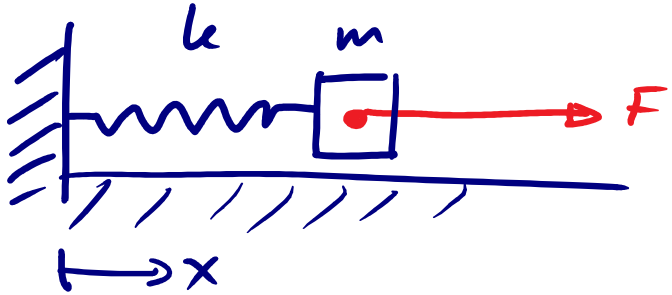


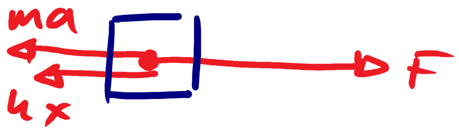




$$M\ddot{u} \approx 0$$

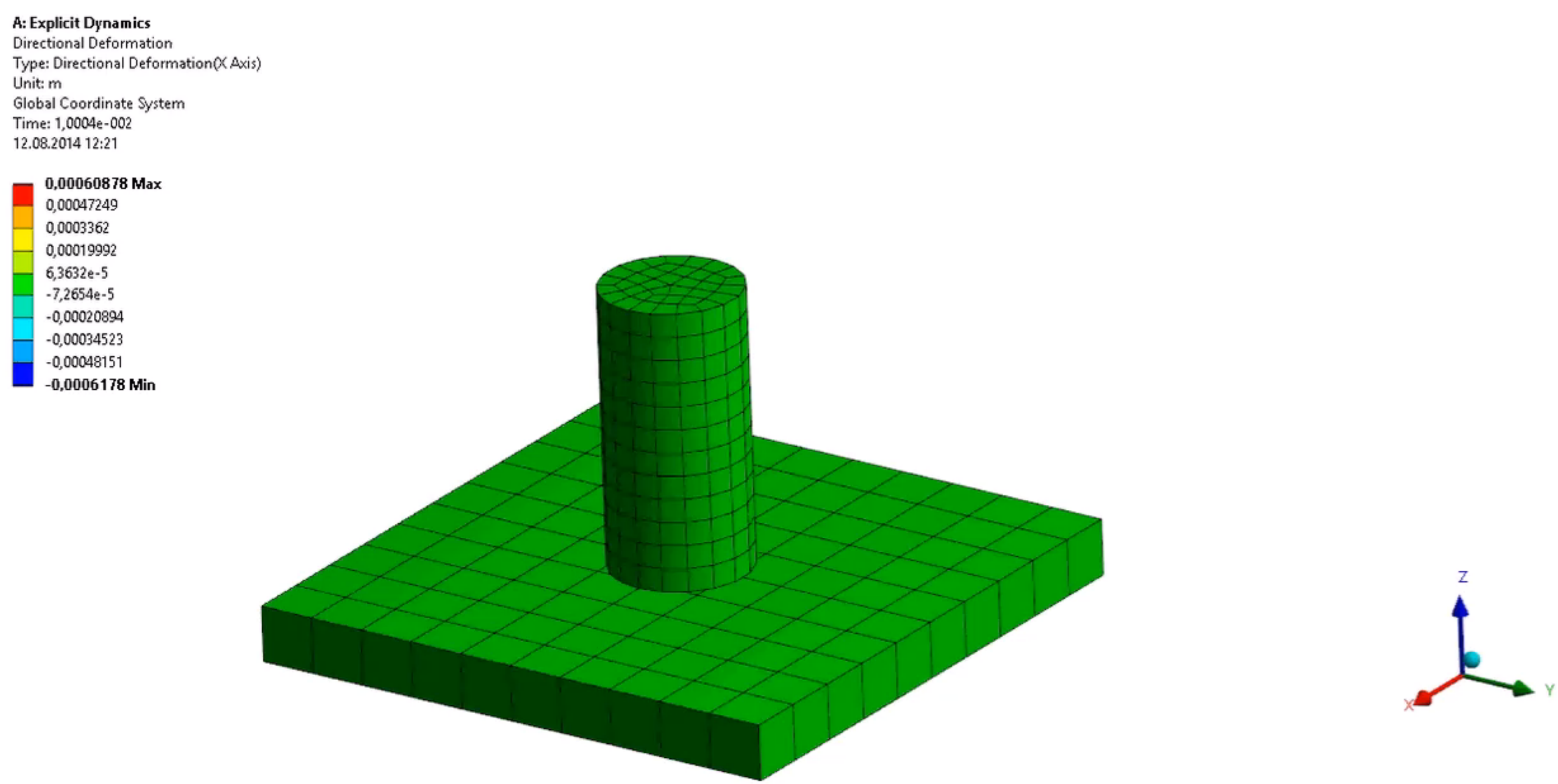
# Dynamik (bzw. Kinetik)

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F$$




$$M\ddot{u} > 0$$



A: Explicit Dynamics
Directional Deformation
Type: Directional Deformation(X Axis)
Unit: m
Global Coordinate System
Time: 1,0004e-002
12.08.2014 12:21
0,00060878 Max
0,00047249
0,0003362
0,00019992
6,3632e-5
-7,2654e-5
-0,00020894
-0,00034523
-0,00048151
-0,0006178 Min
Z
Y
X

# Zeitintegration

$$\ddot{u} = M^{-1}(F - C\dot{u} - Ku)$$

$\Longrightarrow$ zweimal über $t$ integrieren

$$\int_t^{t+\Delta t} \ddot{u}(\tau)\,d\tau = \dot{u}(t+\Delta t) - \dot{u}(t)$$

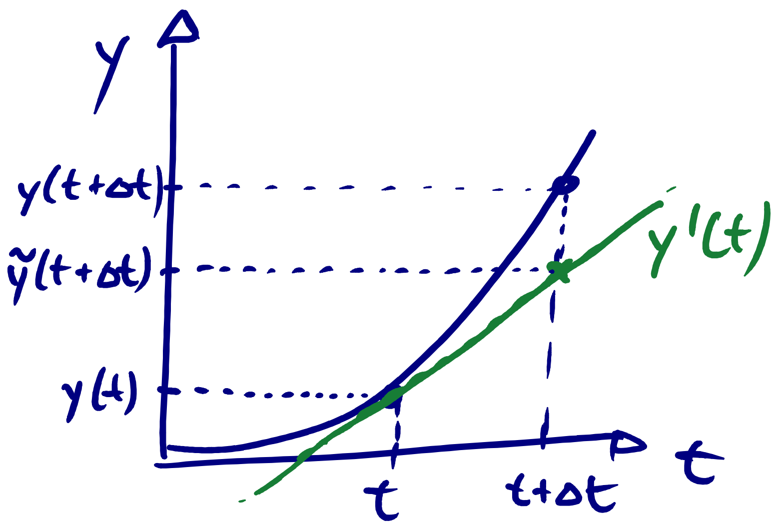
$$\Longleftrightarrow \quad \dot{u}(t+\Delta t) = \dot{u}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{u}(\tau)\,d\tau$$

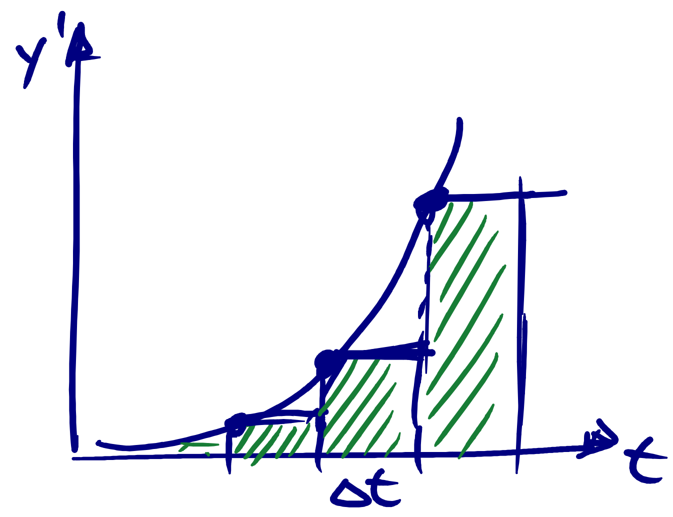
# Explizit

sei $y := \dot{u}$

z.B. expl. Euler:

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \underbrace{\Delta t\, y'(t)}_{\approx \int_t^{t+\Delta t} y' \, d\tau} = \tilde{y}(t+\Delta t)$$

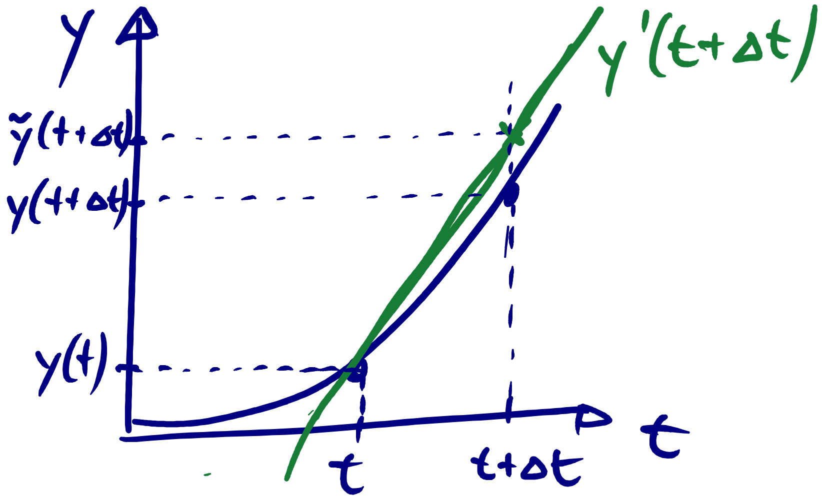


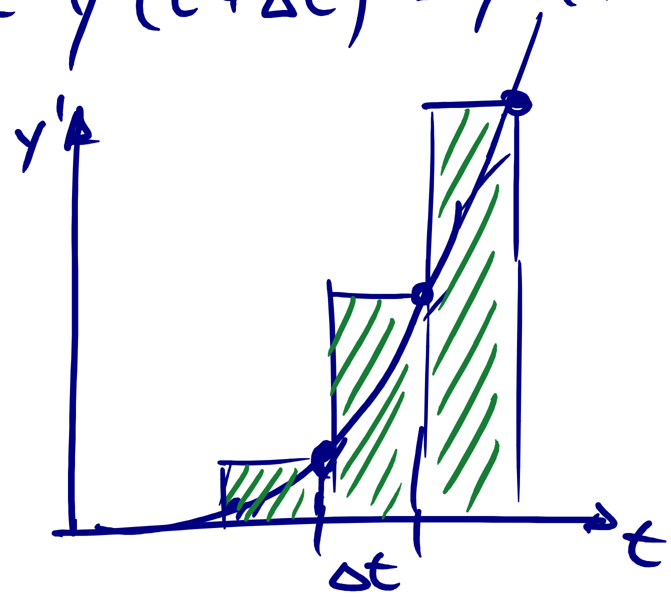



# Implizit

z.B. impl. Euler:

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \underbrace{\Delta t \; y'(t+\Delta t)}_{\approx \int_t^{t+\Delta t} y' \, d\tau} = \tilde{y}(t+\Delta t)$$



# ANSYS Explicit Dynamics

Explicit Dynamics

## (Explicit Dynamics Theory Guide, vereinfacht)

Gleichgewichtsbedingung gilt am Anfang jedes Zeitschritts!

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_i = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}_i - \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_i)$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{i+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t\ddot{\boldsymbol{u}}_i$$

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_{i+\frac{1}{2}}$$

$\dot{u}_i$ und $u_i$ sind bereits bekannt
$M$ ist eine **Diagonalmatrix!**

unter der Annahme, daß

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{-\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}_0 - \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\boldsymbol{u}}_0$$

Extrapolation der Anfangsgeschwindigkeit
für $t = -\frac{1}{2}\Delta t$

# ANSYS Transient Structural
## (Theory Reference, vereinfacht)

Transient Structural

Löse

Gleichgewichtsbedingung am Ende jedes Zeitschritts

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_{i+1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}_{i+1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{F}_{i+1}$$

„Initial guess" für $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i$

mit

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{u}}_i + \frac{1}{2}\Delta t(\ddot{\boldsymbol{u}}_i + \ddot{\boldsymbol{u}}_{i+1})$$

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_i + \frac{1}{4}\Delta t^2(\ddot{\boldsymbol{u}}_i + \ddot{\boldsymbol{u}}_{i+1})$$

für Zeitschritte $i = 0 \ldots n$

$u_i \coloneqq u(t_0 + i\Delta t)$

# Zeitschrittweite (explizit)

Annahme: $\ddot{u} \equiv \mathrm{const.}$ während eines Zeitschritts
→ Lineare Extrapolation basierend auf aktuellem Zustand

Gilt nur näherungsweise für ausreichend kleine Zeitschritte:

**CFL-Bedingung (Courant-Friedrichs-Lewy)**
Zeitschrittweite muß so klein sein, daß der Schall sich nicht weiter als ein Element-weit fortpflanzen kann.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} = \min \frac{L_\mathrm{e}}{c_\mathrm{l}}$$ bzw. Courant-Zahl $\max \frac{c_\mathrm{l} \Delta x}{L_\mathrm{e}} \leq 1$

$$c_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3} G}{\rho}}$$

Uniaxial:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

mit
$L_\mathrm{e}$: charakteristische Elementdimension
$c_\mathrm{l}$: Schallgeschwindigkeit in Festkörpern, longitudinal (Druckwelle)
$c_\mathrm{t}$: Schallgeschwindigkeit in Festkörpern, transversal (Scherwelle) $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

# Mass Scaling

$$\Delta t \propto \frac{1}{c_l} \text{ und } c_l \propto \sqrt{\frac{1}{\rho}} \Rightarrow \Delta t \propto \sqrt{\rho} \Rightarrow \Delta t \propto \sqrt{m}$$

Idee: Skaliere Masse von Elementen, die zu sehr kleinen Zeitschritten führen würden

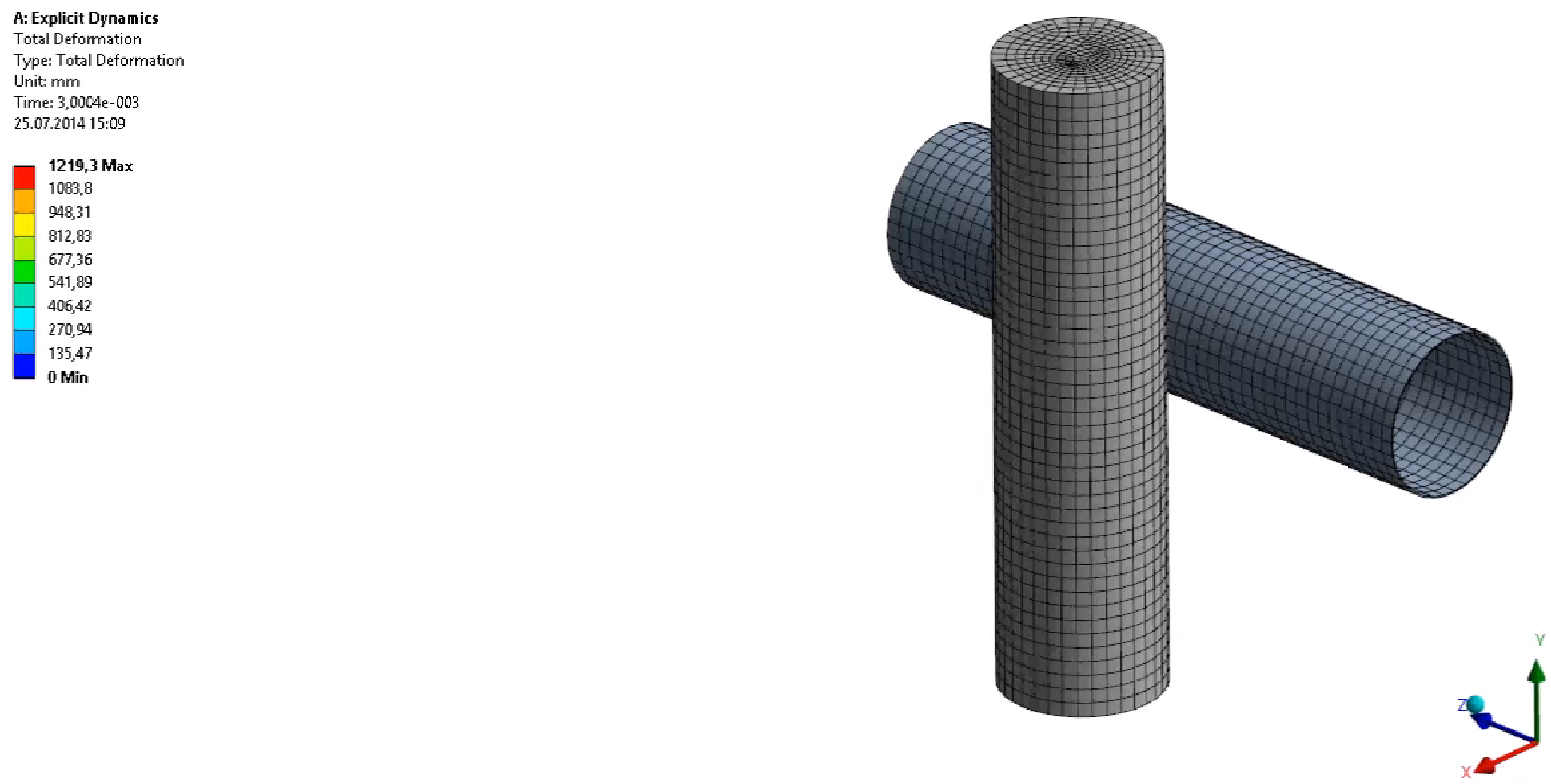
Achtung: Ändert Trägheit lokal!

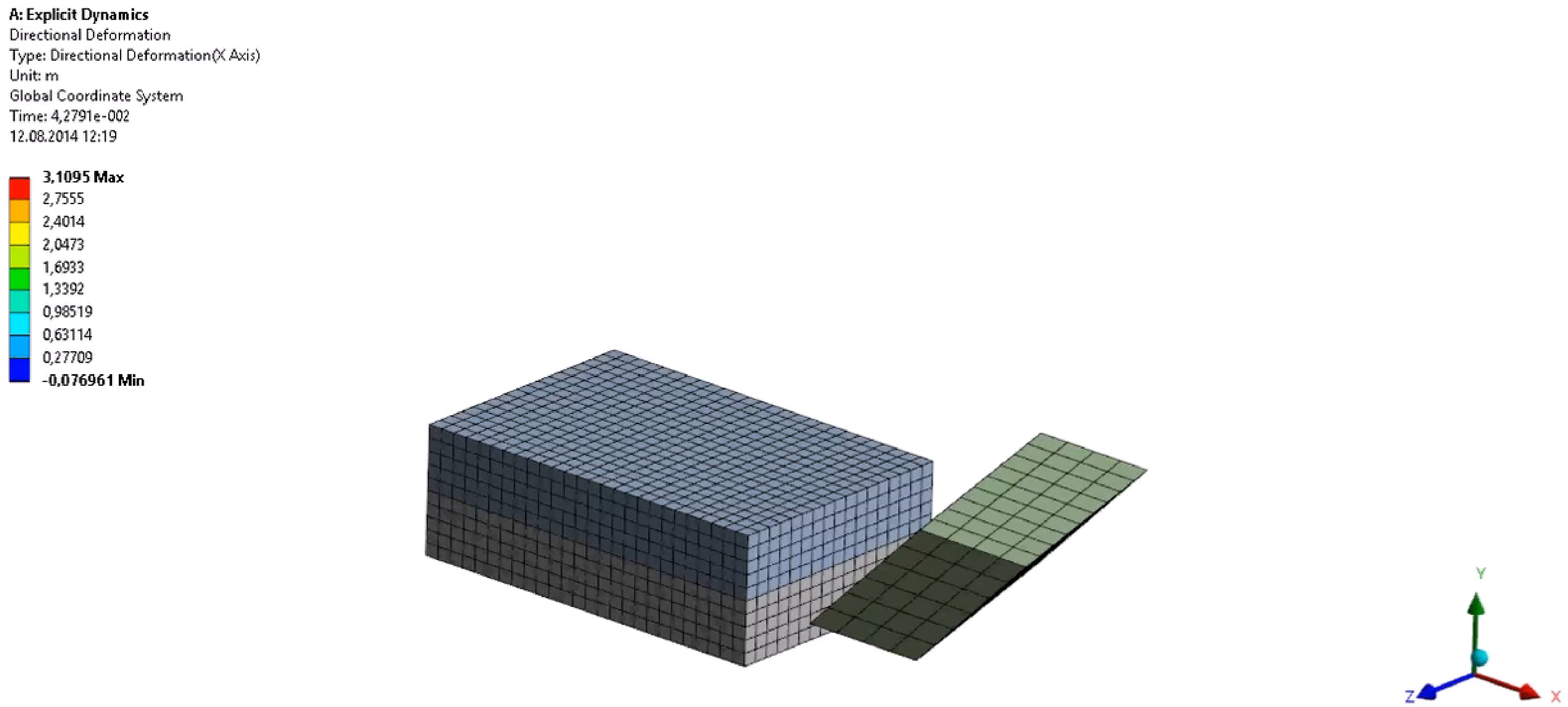
| Step Controls | |
|---|---|
| Resume From Cycle | 0 |
| Maximum Number of Cycles | 1e+07 |
| End Time | 1,e-002 s |
| Maximum Energy Error | 0,1 |
| Reference Energy Cycle | 0 |
| Initial Time Step | Program Controlled |
| Minimum Time Step | Program Controlled |
| Maximum Time Step | Program Controlled |
| Time Step Safety Factor | 0,9 |
| Characteristic Dimension | Diagonals |
| Automatic Mass Scaling | Yes |
| Minimum CFL Time Step | 1,e-020 s |
| Maximum Element Scaling | 100, |
| Maximum Part Scaling | 5,e-002 |
| Update Frequency | 0 |

| Implizit | Explizit |
|---|---|
| Betrachte Gesamtsystem<br>→ Löse in jedem Zeitschritt jeweils ein NLGLS | Betrachte Bewegung isolierter Knoten über kleine Zeitspanne $\Delta t$<br>→ entkoppeltes System |
| Finde $\boldsymbol{u}$, das die Gleichung $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$ am Ende des Zeitschritts erfüllt<br>→ iterative Verfahren (Newton-Raphson)<br>→ Zeitkomplexität pro Iteration in $\mathcal{O}(n^3)$ mit $n = $ #DOF | Zustand am Ende eines Zeitschritts hängt alleine von Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu Beginn des Zeitschritts ab (Extrapolation)<br>→ Einzelgleichungen können direkt (explizit) ausgewertet werden<br>→ Keine Iteration pro Zeitschritt nötig<br>→ Zeitkomplexität für einen Schritt in $\mathcal{O}(n)$ |
| Einzelner Zeitschritt: teuer | Einzelner Zeitschritt: billig |
| Numerisch stabil, sehr große Zeitschritte möglich (unter gewissen Umständen), auch für „steife Systeme“ | Bedingte numerische Stabilität (abhängig von Zeitschrittweite), Zeitschritte müssen i.d.R. sehr klein sein |
| Effizient, wenn eine Lösung mit wenigen Schritten möglich ist | Effizient, wenn hohe zeitliche Auflösung erforderlich ist |
| Konvergenzprobleme bei hochgradig nichtlinearen Problemen, Diskontinuitäten<br>→ viele Schritte und/oder Newton-Iterationen nötig | Kein iteratives Lösen, robust auch für hochgradig nichtlineare Probleme (z.B. Kontakt, Versagen) |
| Gleichgewichtsbedingung wird immer eingehalten | Gleichgewichtsbedingung kann verletzt werden<br>→ Energieerhaltung sicherstellen |
| Beliebige, vollintegrierte Elementtypen | Nur lineare, Reduced-Integration-Elemente (wegen lumped mass matrix) |
| Bedingt parallelisierbar | „Embarrassingly parallel“ |
| Hoher Speicherbedarf | Geringer Speicherbedarf |

# Anwendungsgebiete „explizit“

- „Immer“ explizit:
  - „Impact“, „High-Speed“, „Crash“
  - Schallwellenausbreitung („elastic/stress waves“),
  - Schockwellenausbreitung (Diskontinuität)
- Möglicherweise explizit:
  - Große Verformung & geometrische Nichtlinearitäten
  - Komplizierte Kontaktbedingungen
  - Kompliziertes Materialverhalten (z.B. Versagen)
  - Nichtlinearitäten wie Knickung
- … und überall, wo implizite Verfahren mit Konvergenzproblemen zu kämpfen haben


A: Explicit Dynamics
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm
Time: 3,0004e-003
25.07.2014 15:09
1219,3 Max
1083,8
948,31
812,83
677,36
541,89
406,42
270,94
135,47
0 Min
Y
Z
X


A: Explicit Dynamics
Directional Deformation
Type: Directional Deformation(X Axis)
Unit: m
Global Coordinate System
Time: 4,2791e-002
12.08.2014 12:19
3,1095 Max
2,7555
2,4014
2,0473
1,6933
1,3392
0,98519
0,63114
0,27709
-0,076961 Min
Y
Z
X