Praktikum Simulationssoftware (SiSo)

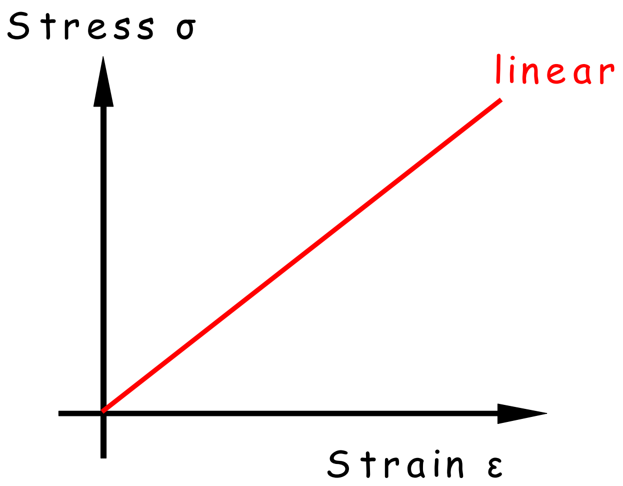
Einführung zu P03
„Werkstoffgesetze, Anisotropie“

Ulrich Simon, Frank Niemeyer, Martin Pietsch

Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (UZWR)
www.uni-ulm.de/uzwr

Werkstoffgesetze

... verknüpfen Spannungen und Dehnungen miteinander



Hookesches Gesetz (1D)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Verallgemeinertes Hookesches Gesetz (3D)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

- Voll besetzter Tensor 4. Stufe für drei Dimensionen (81)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen (Boltzmann Kontinua) und Scherdehnungen (36)

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}$$

- Maxwellscher Reziprozitätssatz → Volle Anisotropie (21)
- Orthotropie (9)
- Transverse Isotropie (5)
- Isotropie (z.B.: E-Modul E und Querkontraktionszahl ν) (2)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ \text{sym} & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

Zum Merken:

Ein linear-elastisches, isotropes Werkstoffverhalten wird durch zwei Werkstoffparameter gekennzeichnet:

z.B.: E und ν

Ein allgemeines anisotropes Werkstoffgesetz besitzt 21 Werkstoffparameter.

<u>Zwei von:</u>

E - Elastizitätsmodul, E-Modul [Young's modulus]

ν - Querkontraktionszahl [Poisson's ratio] (0 ... <u>0.3</u> ... 0.5)

G - Schubmodul [Shear modulus]

K - Kompressionsmodul [Bulk modulus]

μ, λ - Lamesche Konstanten [Lame Constants]

<u>Def. Querkontraktionszahl</u> [Poisson's ratio] (0 ... <u>0.3</u> ... 0.5)

$$\nu = -\varepsilon_{\text{Dicke}} / \varepsilon_{\text{Länge}}$$

Orthotropes Werkstoffgesetze

… mit 9 Parametern

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{D}E_1 & \frac{\nu_{13}\nu_{32}+\nu_{12}}{D}E_2 & \frac{\nu_{12}\nu_{23}+\nu_{13}}{D}E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{D}E_2 & \frac{\nu_{21}\nu_{13}+\nu_{23}}{D}E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{D}E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & \mathrm{sym} & & & G_{13} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

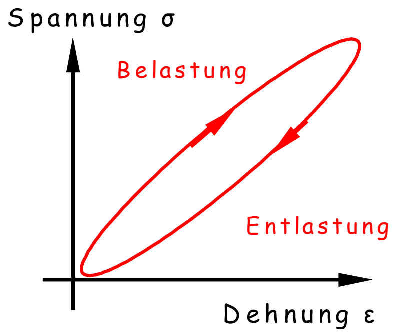
mit

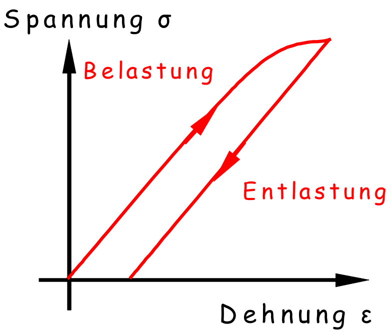
$$D = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} \, .$$

Transvers isotropes Werkstoffgesetze

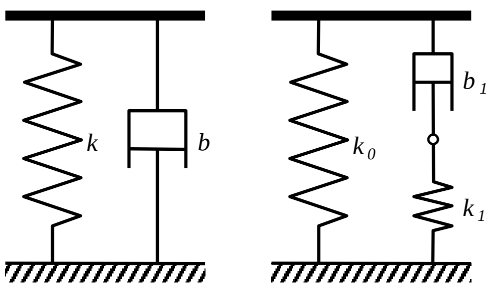
$$\begin{aligned} E_2 &= E_3 \\ G_{12} &= G_{13} \\ \nu_{12} &= \nu_{13} \\ G_{23} &= \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \end{aligned}$$

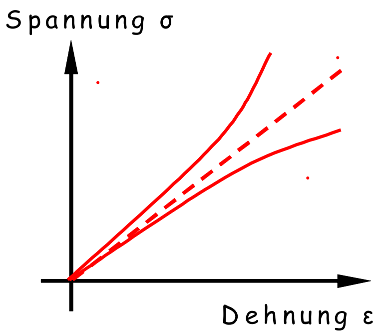
Kompliziertere Werkstoffgesetze:





- **Nicht-linear**
- **Nicht-elastisch (= plastisch)**
- ***Anisotrop***
- **Viskoelastisch, Typ: innere Dämpfung**
- **Viskoelastisch, Typ: Gedächtniseffekt**





Plastische Dehnungen