Praktikum Simulationssoftware (SiSo)

Einführung zu P01 „Elastostatik“

Ulrich Simon, Frank Niemeyer, Martin Pietsch

Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (UZWR)
www.uni-ulm.de/uzwr

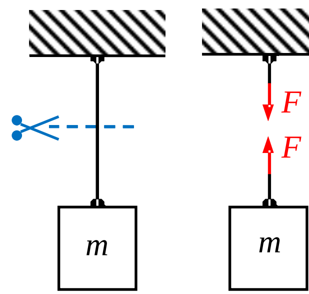
Statik starrer Körper

Wiederholung aus TM

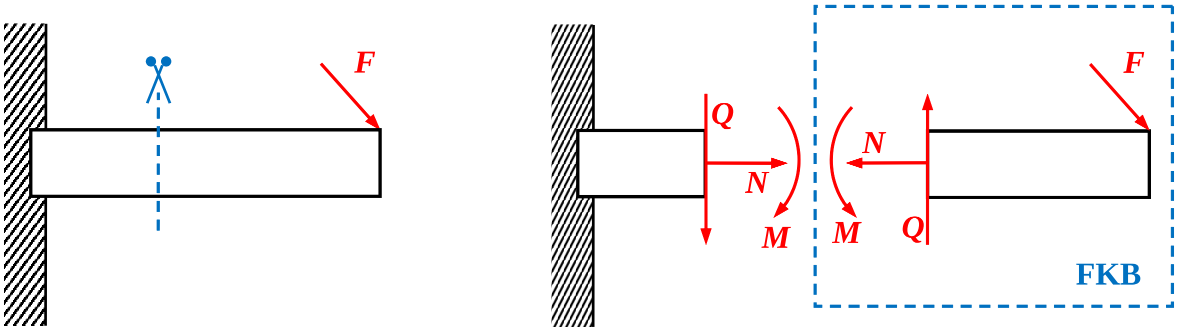
- Kraft, Moment
- Schnittprinzip, Freikörperbild
- Freiheitsgrade und Bindungen
- Statisches Gleichgewicht

Verschiedene Schnittkräfte und -momente

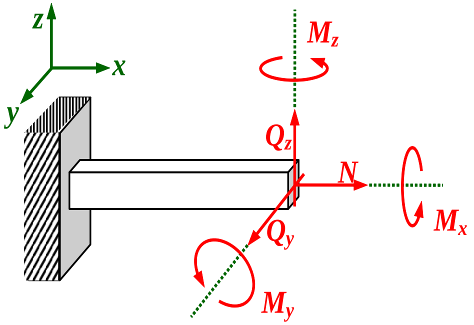
Seil:



Balken in 2D:

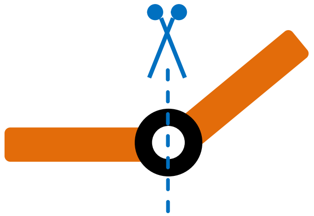


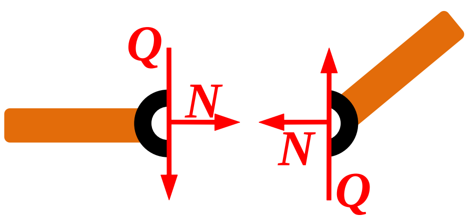
Balken in 3D:



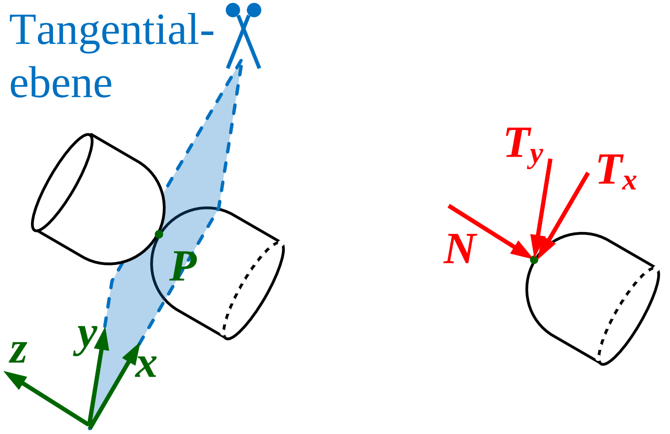
Verschiedene Schnittkräfte und -momente

Gelenk in 2D:

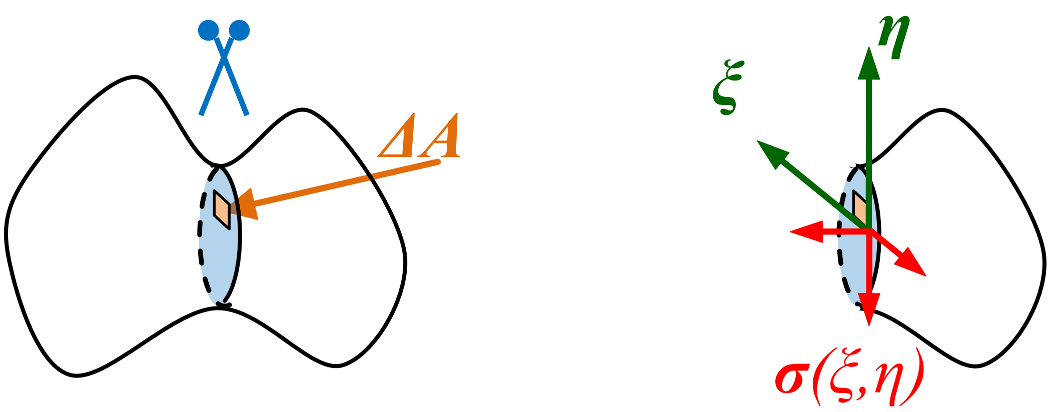




Punktkontakt in 3D:



Schnitt durch beliebigen Körper in 3D:



Freiheitsgrade

Freiheitsgrad(e) [degree(s) of Freedom, DOF]:

= Prinzipielle Bewegungsmöglichkeiten

Objekt	*Freiheitsgrade f*	*Bewegungsarten*
Punktmasse in 2D	2	2 Translationen
Punktmasse in 3D	3	3 Translationen
Starrer Körper in 2D	3	2 Transl., 1 Rotation
Starrer Körper in 3D	6	3 Transl., 3 Rotation
n starre Körper in 2D	n x 3	…
n starre Körper in 3D	n x 6	…

Verschiedene Bindungen und Auflager

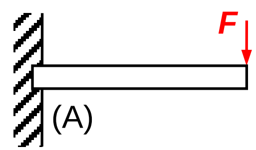
Resultierender Freiheitsgrad f bei Systemen von

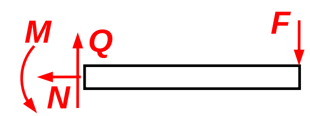
- n starren Körpern [rigid bodies] mit
- b (lin. unabh.) Bindungen [constraints]:

$f = 3n - b$ (in 2D)

$f = 6n - b$ (in 3D)

A) Feste Einspannung (2D):

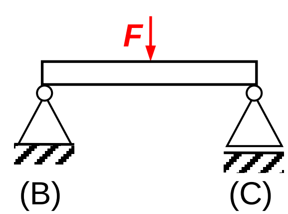


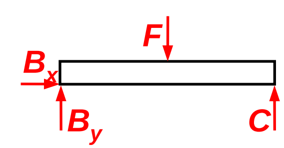


$b_A = 3$

B) Festes drehbares Lager (2D):

C) Verschiebbares drehbares Lager (2D):

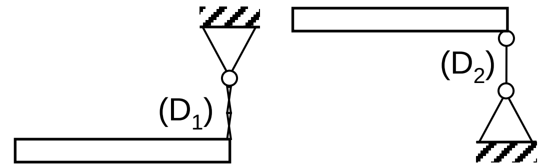




$b_B = 2$ $b_C = 1$

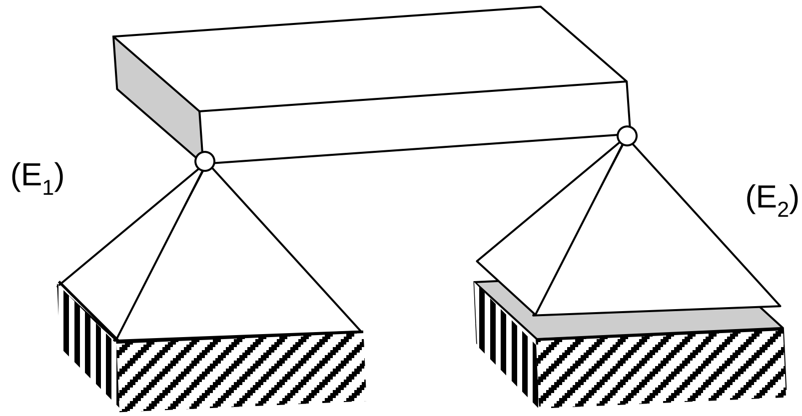
Verschiedene Bindungen und Auflager

D) Seil / Pendelstütze:



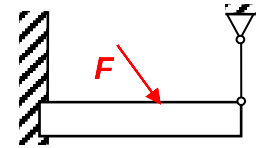
$b_{D1} = 1$ $b_{D2} = 1$

E) Lager in 3D:

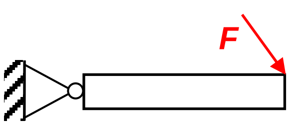


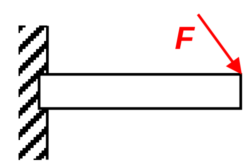
$b_{E1} = 3$ $b_{E2} = 1$

Statische Bestimmtheit



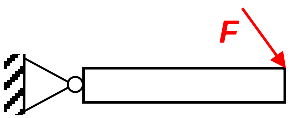
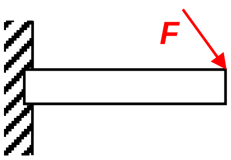
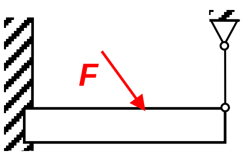
System ist statisch …	DOF $f = 3n - b$	Erklärung	Beispiele
unbestimmt	> 0	System gehört in die Dynamik	
bestimmt	$= 0$	Auflagerreaktionen können berechnet werden	
überbestimmt	< 0	Auflagerreaktionen können nur berechnet werden, wenn Balken verformbar angenommen wird.	



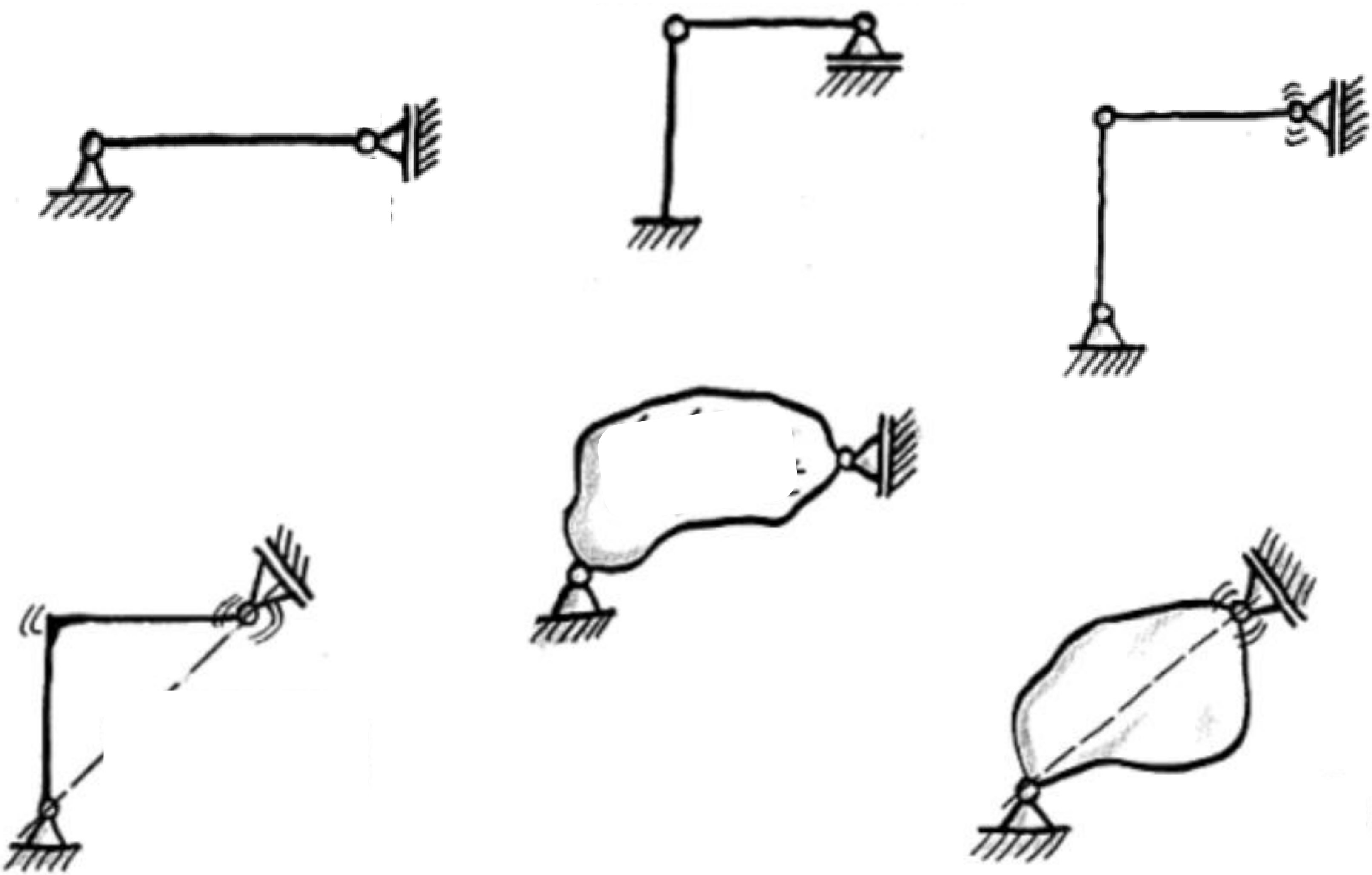


Statische Bestimmtheit

Auflösung

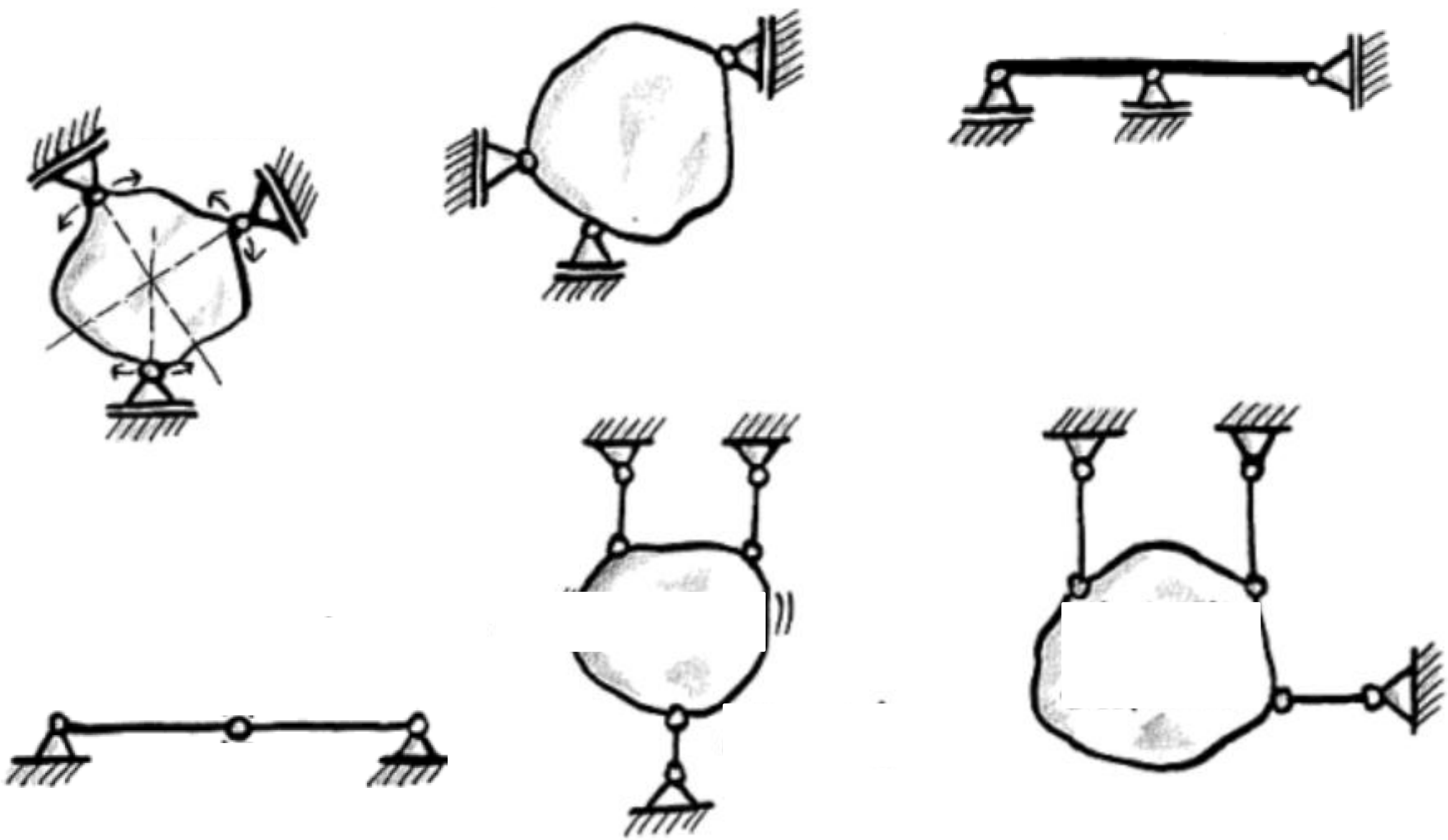
System ist statisch …	DOF $f = 3n - b$	Erklärung	Beispiele
unbestimmt	> 0	System gehört in die **Dynamik**	
bestimmt	$= 0$	**Statik:** Auflagerreaktionen können berechnet werden	
überbestimmt	< 0	**Statik:** Auflagerreaktionen können nur berechnet werden, wenn Balken verformbar ange-nommen wird.	

Beispiele (2D) zur statischen Bestimmtheit



Quelle: „Keine Panik vor Mechanik“

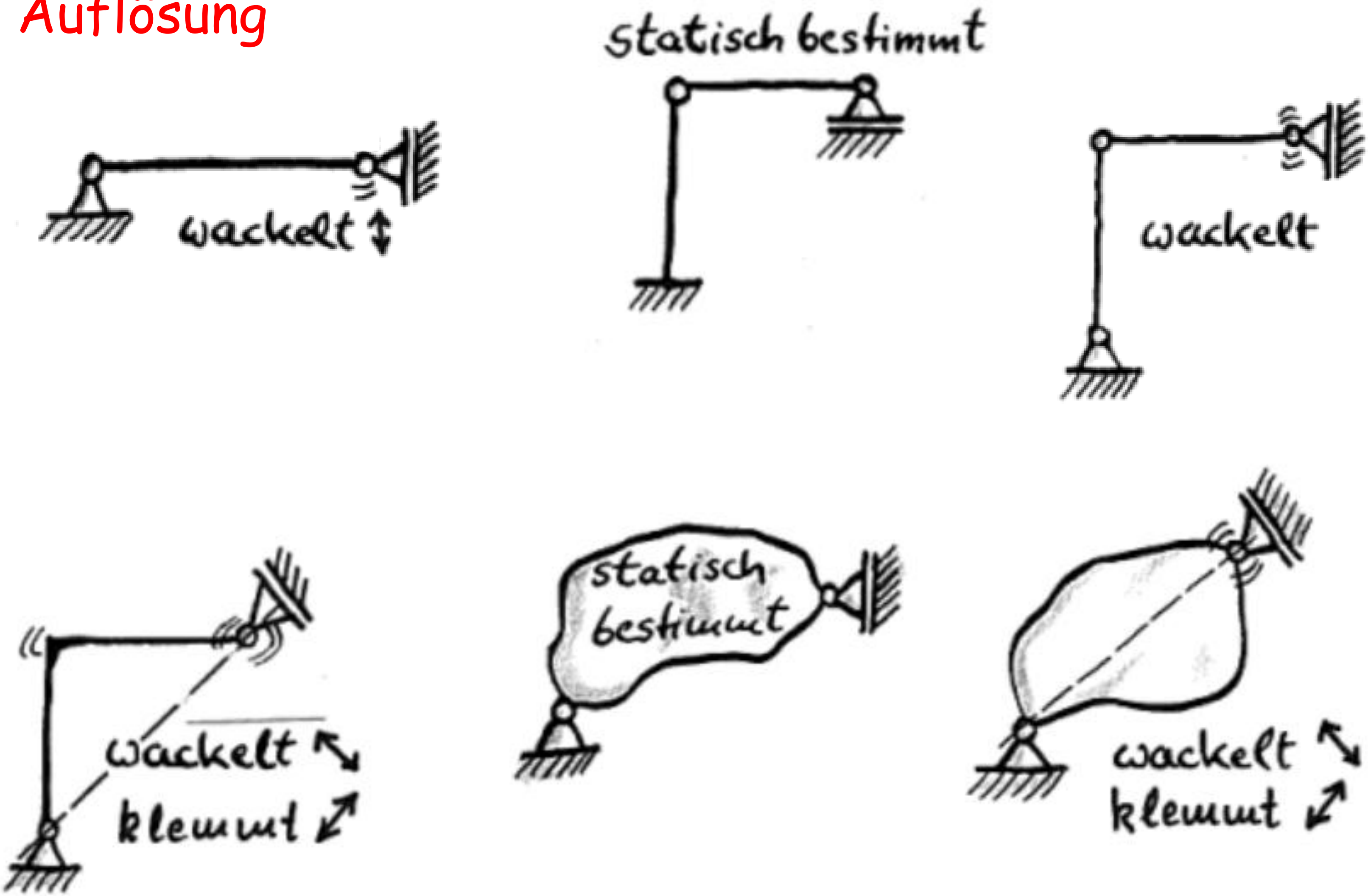
Beispiele (2D) zur statischen Bestimmtheit



Quelle: „Keine Panik vor Mechanik“

Beispiele (2D) zur statischen Bestimmtheit

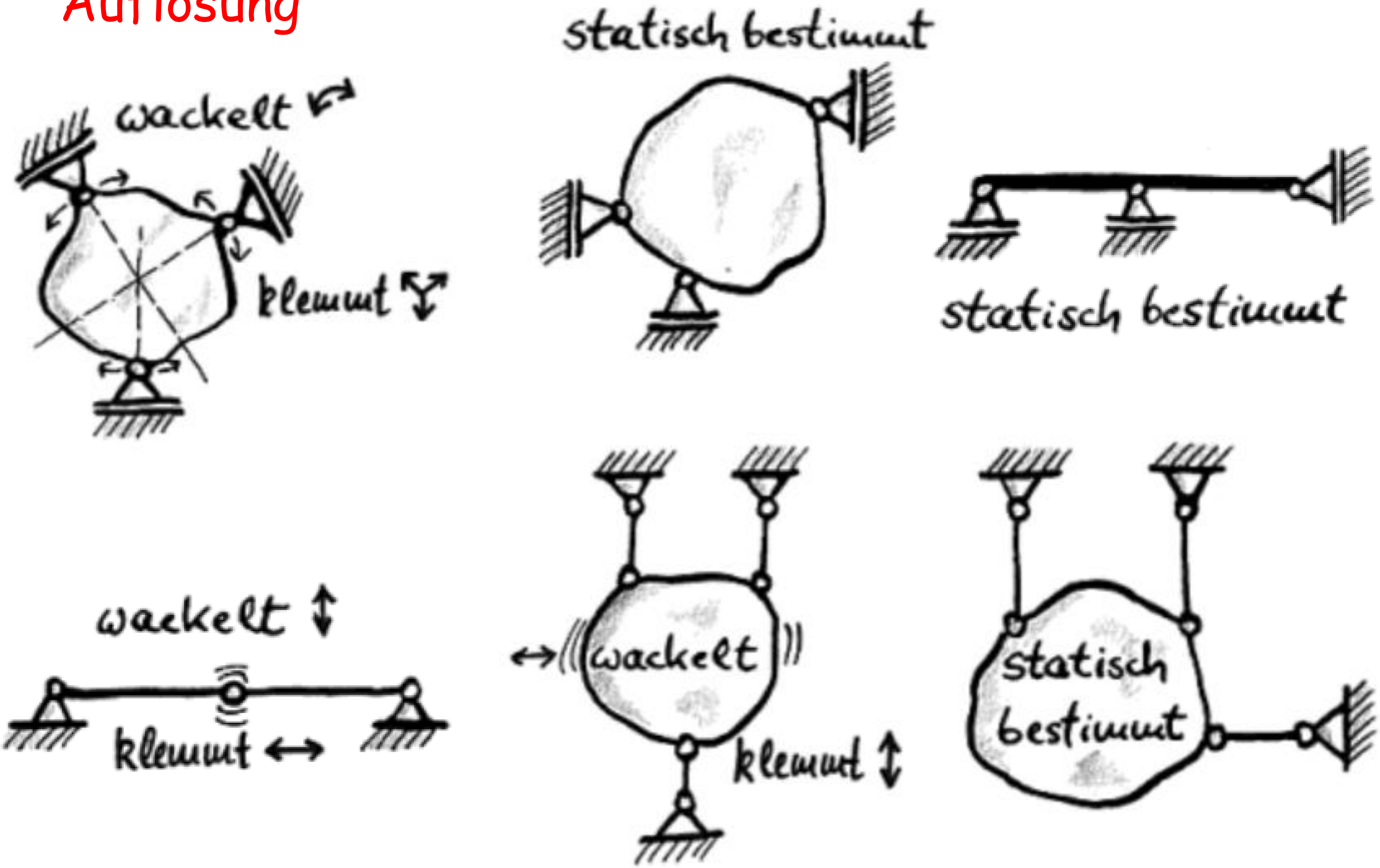
Auflösung



Quelle: „Keine Panik vor Mechanik“

Beispiele (2D) zur statischen Bestimmtheit

Auflösung



Quelle: „Keine Panik vor Mechanik“

Elastostatik / Festigkeitslehre

Wiederholung

- Spannung, Dehnung
- Werkstoffgesetze
- Einfache Lastfälle

Die Spannung [stress]

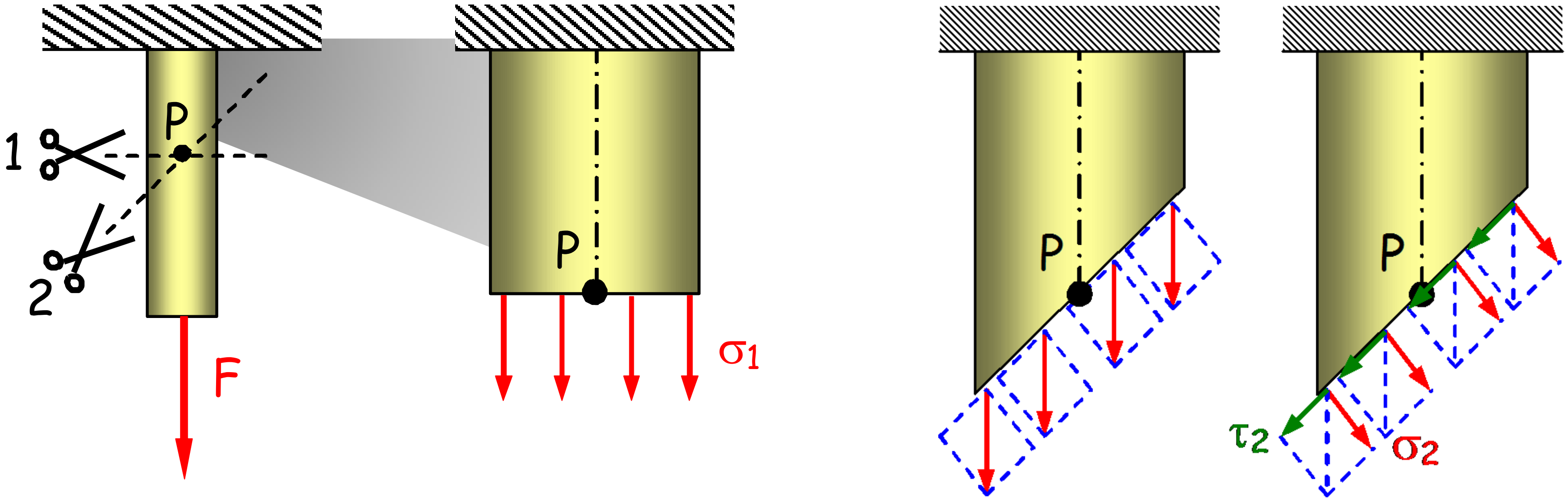
Zum Merken:

Spannung = „verschmierte“ Schnittkraft,

Spannung = Kraft pro Fläche oder $\sigma = F/A$

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Normal- und Schubspannungen



Zugstab

Schnitt 1:
mit Normalspannung σ_1

Schnitt 2:
mit Normalspannung σ_2
und Schubspannung τ_2

Zum Merken:

Erst Schnitt festlegen, dann kann man die Spannung berechnen

Allgemeiner (3D) Spannungszustand ...

... in einem Punkt P des Körpers:

- **3** Spannungskomponenten in einem Schnitt (Normalsp., 2x Schubsp.)

  x

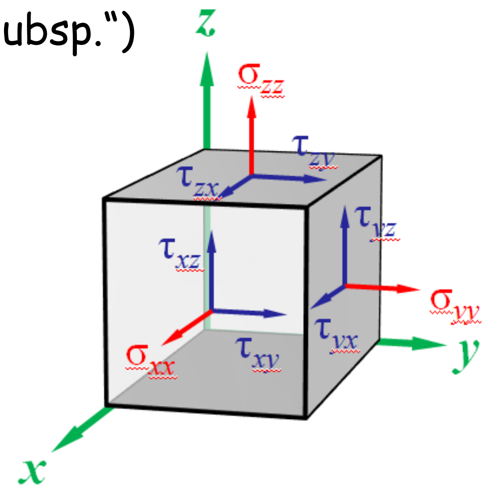
- **3** Schnitte (z.B. frontal, sagittal, transversal)

  =

- **9** Spannungskomponenten, die den vollständigen 3d Spannungszustand in einem Punkt im Körper kennzeichnen.
- **6** Komponenten davon sind unabhängig („Gleichheit der Schubsp.")

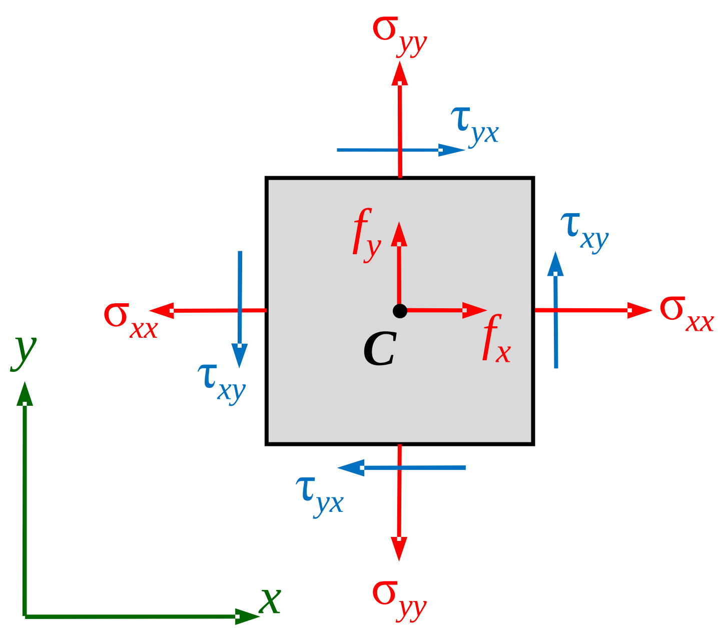
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Der „Spannungstensor"



Symmetrie des Spannungstensors

Boltzmann-Kontinuum: Nur Volumenkräfte (f_x und f_y), keine Volumenmomente
→ „Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen"

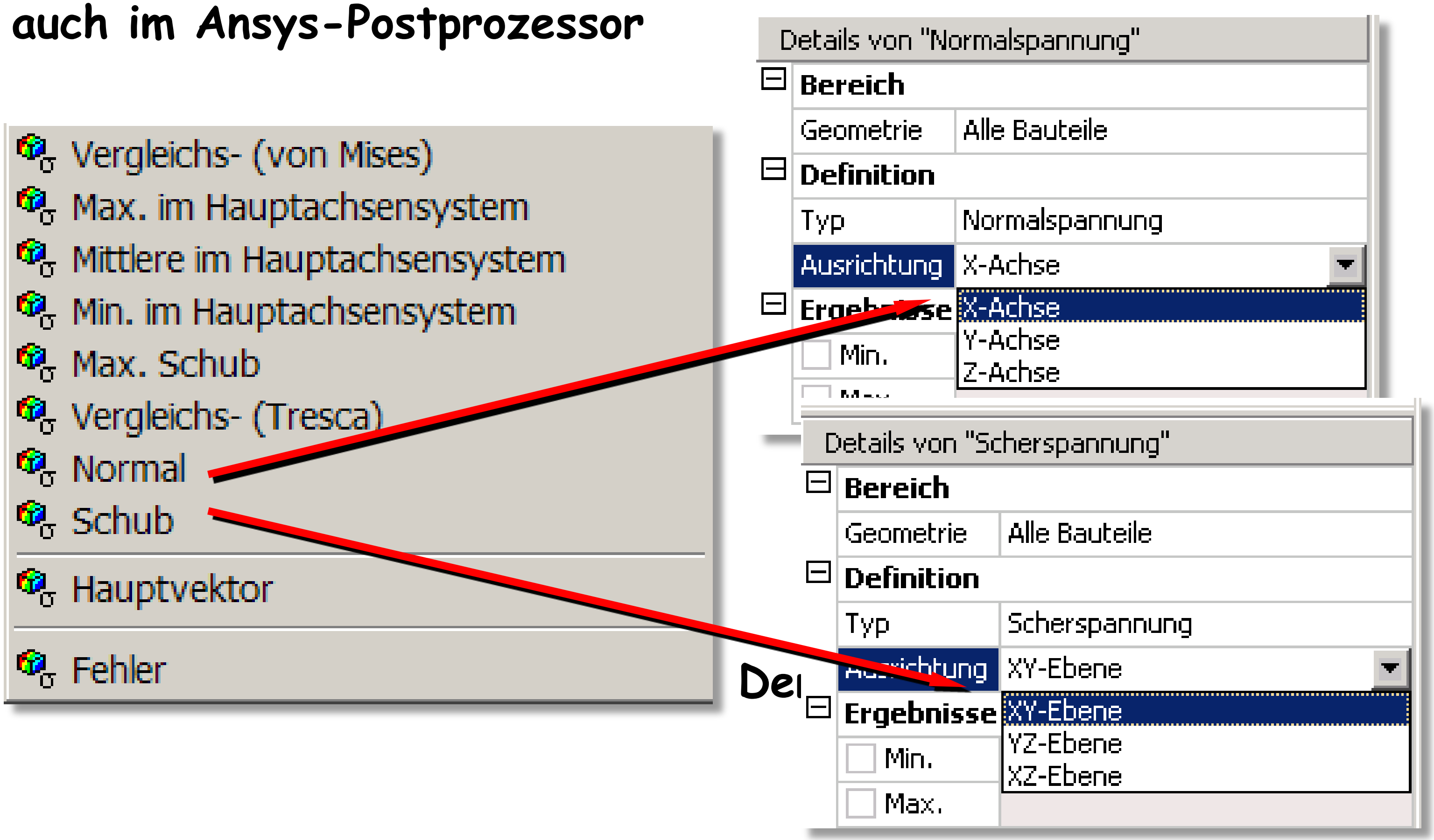


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ . & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \mathrm{sym} & . & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sum M^{(C)} = 2 \cdot \underbrace{\tau_{xy} \Delta y \Delta z}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\Delta x}_{\text{Hebelarm}} - 2 \cdot \underbrace{\tau_{yx} \Delta x \Delta z}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\Delta y}_{\text{Hebelarm}} = 0.$$

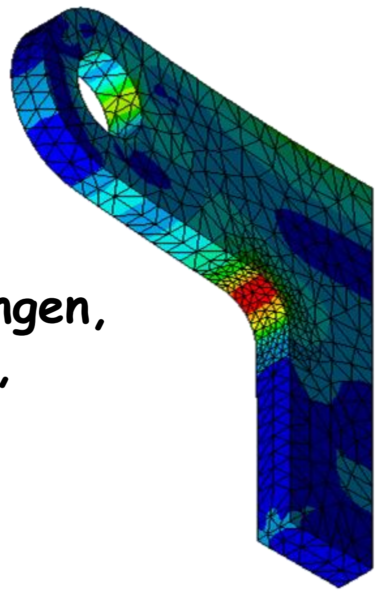
Allgemeiner (3D) Spannungszustand ...

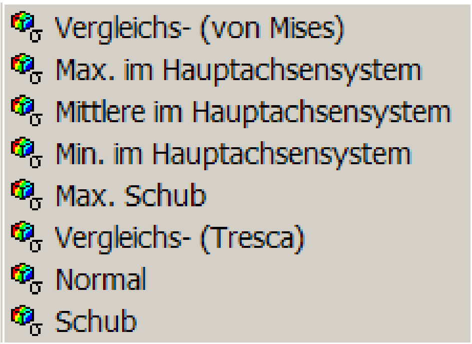
<u>Sechs</u> Komponenten …
… auch im Ansys-Postprozessor



Allgemeiner (3D) Spannungszustand ...

- Problem: Ein Buntes Bild zeigt nur eine Komponente.
- Welche soll man nehmen?
- Man kann „Mischungen“ von Komponenten verwenden.
- „Invarianten“ sind besonders „schlaue“ Mischungen, da unabhängig vom Koordinatensystem, z.B.: Hauptspannungen, Von-Mises-Spannung, Hydrostatischer Spannungsanteil, Oktaeder-Schubspannung, ...

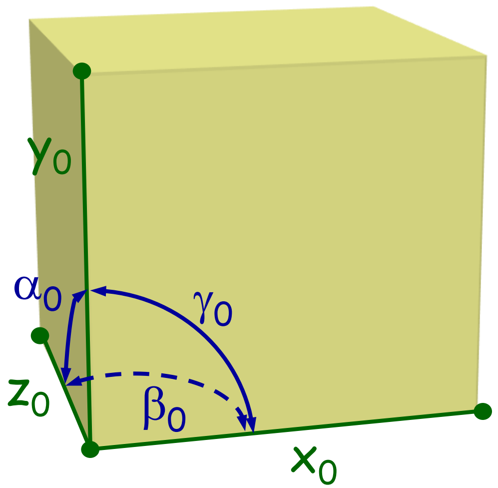




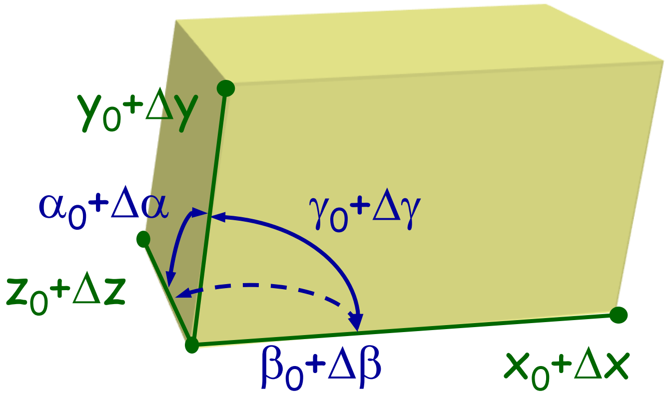
$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 3\,\tau_{xy}^2 + 3\,\tau_{xz}^2 + 3\,\tau_{yz}^2}$$

Allg. 3D Dehnungszustand

Infinitesimales Element:



unverformt
(spannungsfrei)



verformt
(Spannungen an allen Oberflächen)

Allg. 3D Dehnungszustand

Definitionen:

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \varepsilon_{yy} = \lim_{y_0 \to 0} \frac{\Delta y}{y_0}, \quad \varepsilon_{zz} = \lim_{z_0 \to 0} \frac{\Delta z}{z_0}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\gamma, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\beta, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\alpha$$

Universelle Dehnungs-definition:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad i, j = \{x, y, z\}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

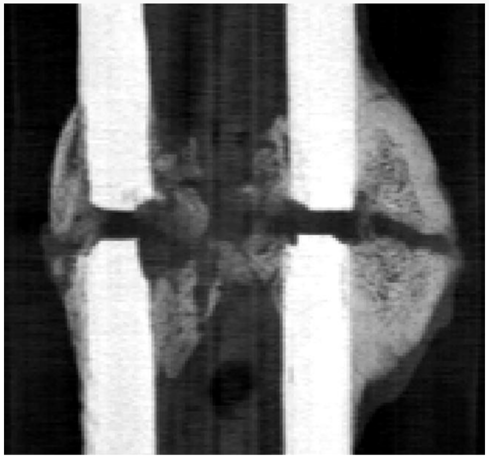
Der „Dehnungstensor"

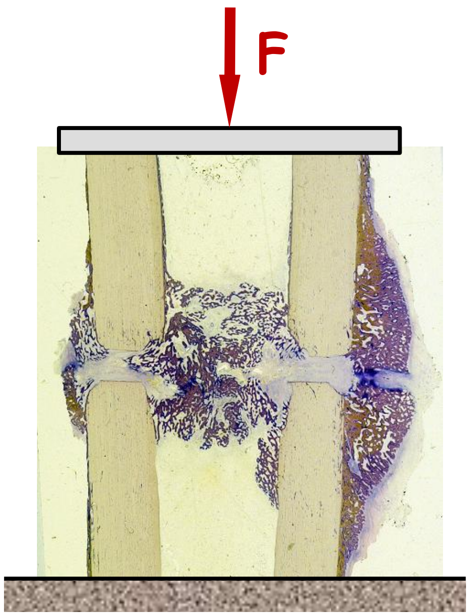
Zum Merken:

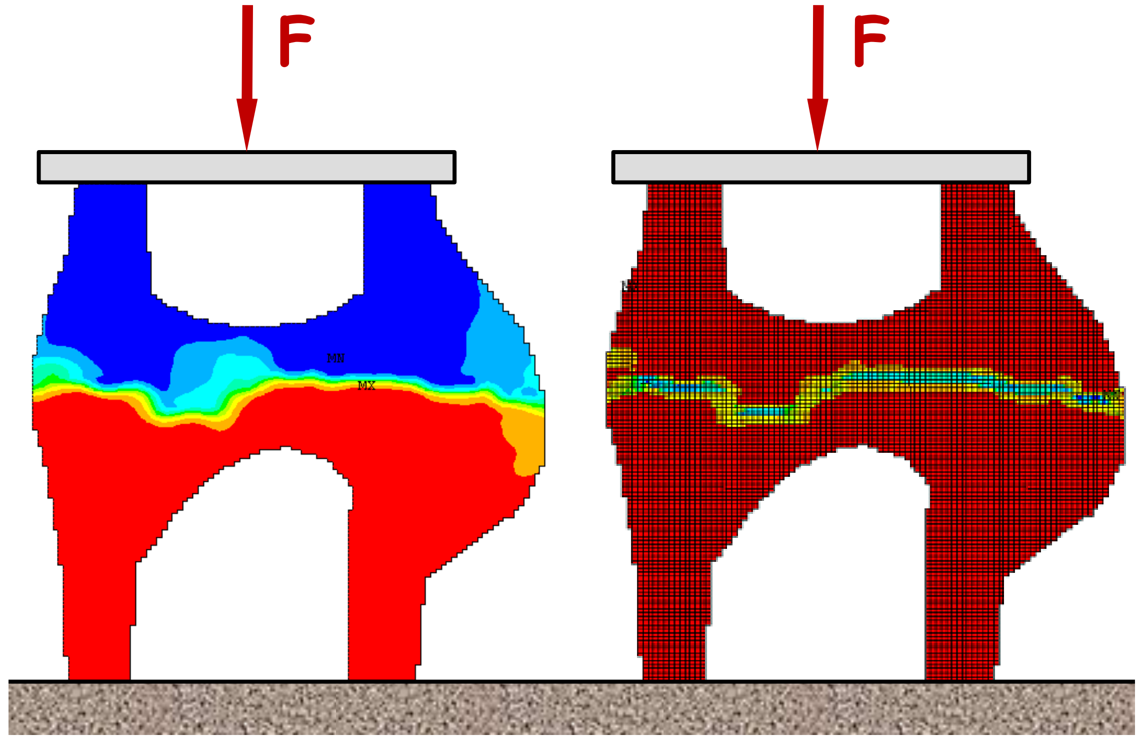
6 Dehnungskomponenten:

3 relative Längenänderungen und 3 Winkeländerungen.

Verschiebung vs. Dehnung am Beispiel „Kallus"







Verschiebung, vertikal

Dehnung, vertikal

Werkstoffgesetze

... verknüpfen Spannungen und Dehnungen miteinander

Fortsetzung folgt