

Vorlesung Wintersemester 2010/2011:

Numerische Methoden in der Biomechanik

Dr.-Ing. Ulrich Simon

Hinweis auf andere Vorlesungen

Tim Wehner: „**Mehrkörperdynamik** in der Biomechanik“

Hendrik Schmidt: „Beispiele von biomechanischen **Finite-Elemente-Analysen**“

Gliederung

- Einführung / Übersicht / Allgemeines
- Beispiel: Simulation der Frakturheilung
 - Finite-Elemente-Methode (FEM)
 - Fuzzy-Logic
- Einführung FEM
 - Theorie am Beispiel des Dehnstabs
- Mehrkörpersimulation (MKS)
- Hinweise zum Einstieg

Modellbildung

Wissenschaft will ...

- Beobachtungen erklären können,
- Vorhersagen treffen können.

⇒ Modelle



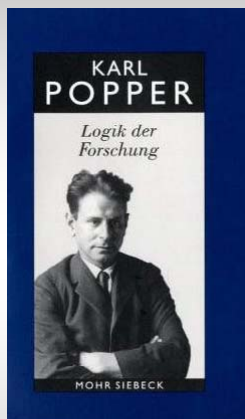
Modelle sind ...

- Abbildungen von Systemen / Prozessen in andere begriffliche oder gegenständliche Systeme,
- mehr oder weniger phänomenologisch,
- fragespezifisch,
- immer Näherungen, Vereinfachungen, Idealisierungen
- mit beschränktem Gültigkeitsbereich.
- **das gilt auch für Experimente und klinische Tests!**

Ein gutes Modell ist ...

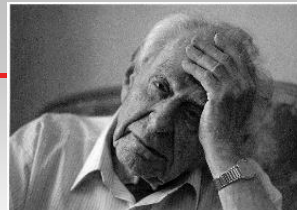
...so kompliziert wie nötig und so einfach wie möglich!

Modellbildung

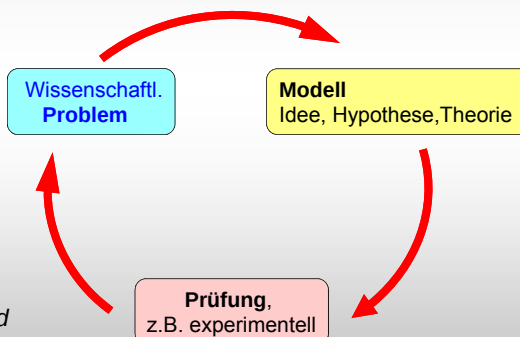


1934

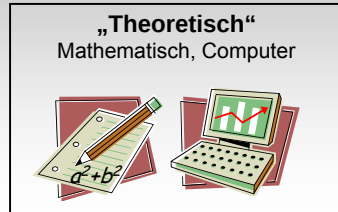
„Wissenschaftliche Aussagen sind immer modellhaft, also vorläufig!“



Sir Karl Raimund Popper (1902-1994)

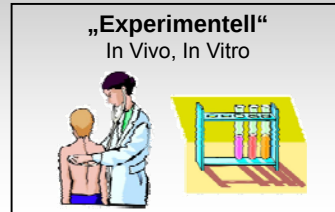


Theoretische gegenüber experimentellen Methoden



Eigenschaften theoretischer Methoden

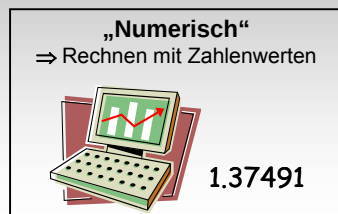
- + Reproduzierbar, eindeutig (determiniert), leicht verfügbar.
- + Parameterstudien durch vielfache Wiederholungen möglich.
- + Modellierung von unerreichbaren oder fiktiven Prozessen möglich.
- + Ethisch unbedenklich
- o Oft stark vereinfacht
- Modellparameter und Validierung erfordern oft zusätzlich Experimente.



Eigenschaften experimenteller Methoden

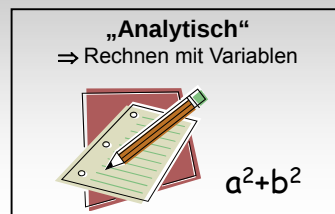
- + Oft realistischer: „Die Natur vergisst keinen Effekt“.
- o Ohne tiefes Verständnis möglich
- Immer Fehlerbehaftet: Unbekannte Einflüsse, Messfehler
- Aber: Selbst In-vivo-Studien sind stetes Modellhaft und deren Ergebnisse nur eingeschränkt gültig.

Numerische gegenüber analytischen Methoden



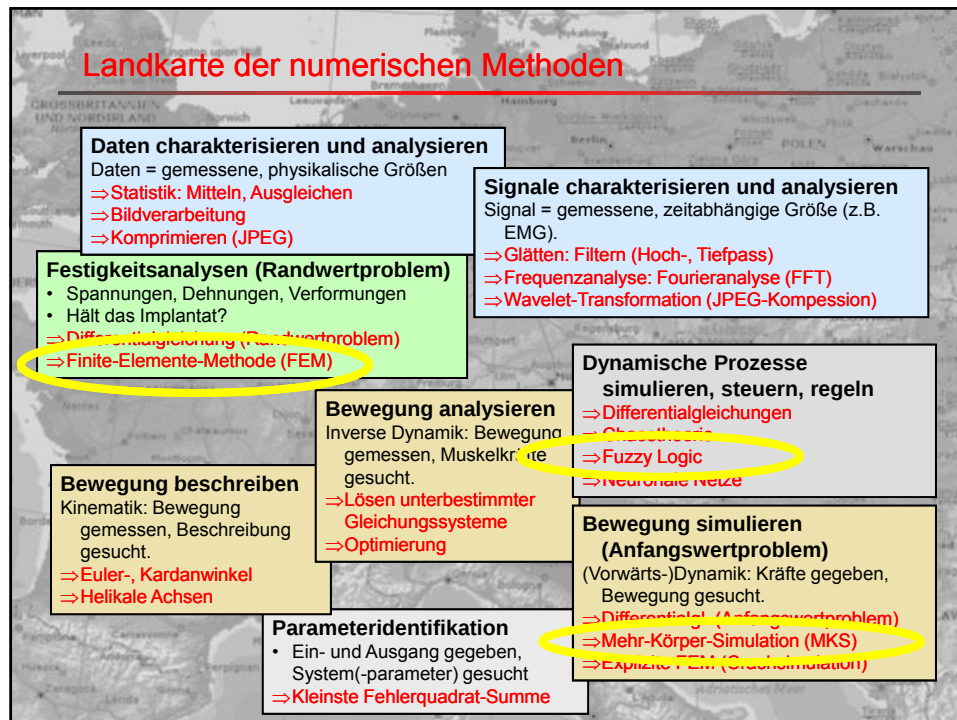
Eigenschaften numerischer Methoden

- Oft Näherungsverfahren
- Alle Parameter, Rand- und Anfangsbedingungen werden als Zahlenwerte eingegeben: Lösung gilt nur für diesen speziellen Fall.
- Parametereinflüsse müssen durch vielfache Rechenwiederholungen untersucht werden.
- Für viele komplexe Probleme sind numerische Methoden bekannt.



Eigenschaften analytischer Methoden

- (Mathematisch) exakte Lösung.
- Analytische Gleichungen mit Variablen: allgemeingültige Aussagen für ganze Modellklassen.
- Parametereinflüsse sofort, allgemeingültig (analytisch) zu erkennen.
- Analytische Lösungen sind nur für wenige einfache Probleme bekannt.



Numerische Methoden allgemein

Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

- Gaußscher Algorithmus (für lineare Gleichungssysteme)
- Spezielle Algorithmen (symmetrische Systeme, Bandstruktur, positiv definite Systeme)
- Newton-Verfahren (für nichtlineare Gleichungssysteme)

Optimierungs- oder Ausgleichsprobleme

- Kleinste Fehlerquadrate (least squares)
- z.B. Inverse Dynamik und Berechnung der Muskelkräfte beim Gang

Eigenwertprobleme

- meist dynamische (periodische) Probleme
- z.B. Berechnung von Eigenfrequenzen

Anfangswertprobleme

- meist dynamische (transiente) Probleme
- numerische Integration (Runge-Kutta-Verfahren)
- Mehr-Körper-Simulation (**MKS**)

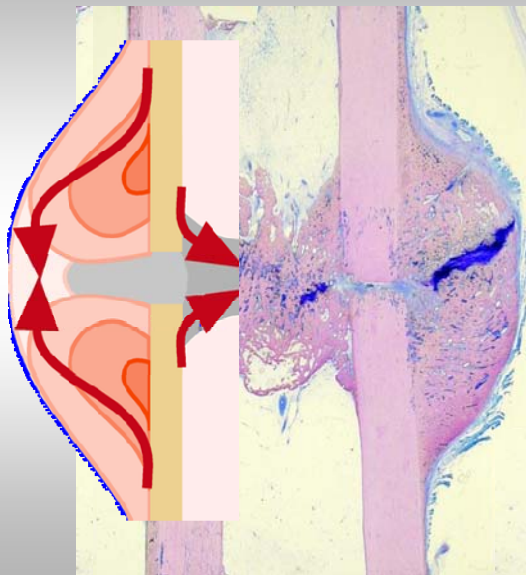
Randwertprobleme

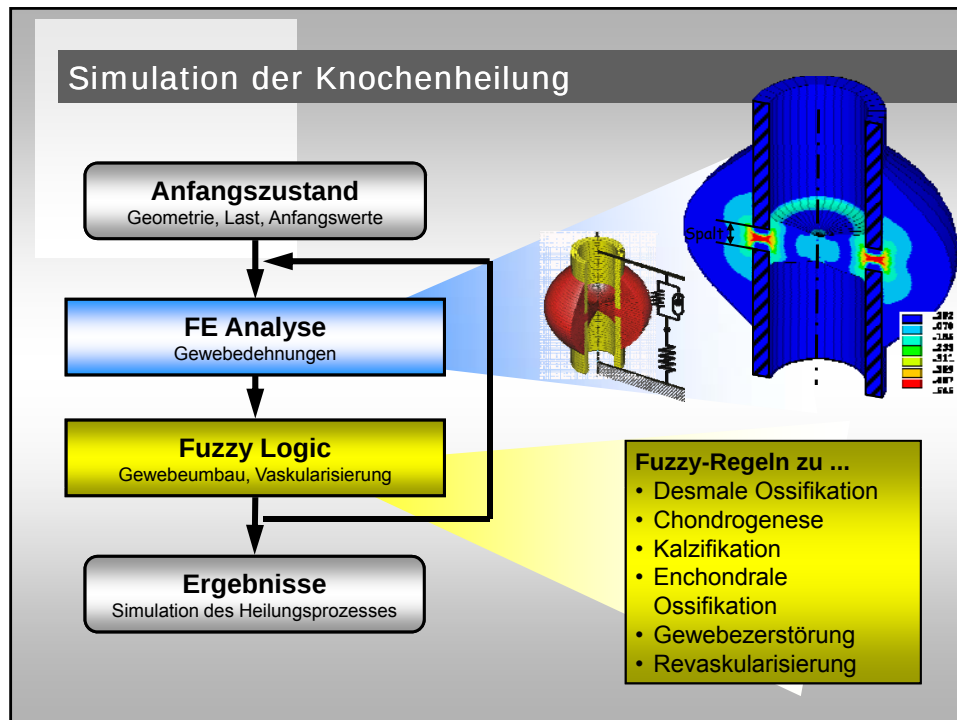
- oft statische Probleme (z.B. Festigkeitsanalysen)
- Finite-Elemente-Methode (**FEM**)

Einheitensysteme

Basiseinheiten			Abgeleitete Einheiten					Bemerkung
Länge	Masse	Zeit	Kraft = $\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$	Spannung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2}$	Dichte = ...	Beschl. = ...	...	
m	kg	sec	N	Pa	kg/m ³	m/sec ²		SI-Basis-Einheiten
mm	t	sec	N	MPa	t/mm ³	mm/sec ²		Organ-Level
µm	t	sec	mN	GPa				Tissue-Level

Beispiel: „Simulation der Frakturheilung“





Fuzzy Logic: Allgemeines

Ursprung:

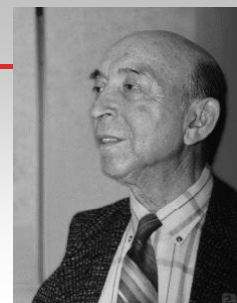
- Lotfi A. Zadeh, Berkeley (1965): „Fuzzy Sets“

Prinzip:

- Fuzzy Logic = „Krause Logik“ im Gegensatz zur scharfen Logik
- *MEHR-ODER-WENIGER* statt *ENTWEDER-ODER*

Einsatzgebiete:

- Regelungstechnik (komplexe Mehrvariablen-Regelung)
- Industriautomation und Konsumgüter
- Sensorik, Datenanalyse, Betriebs- und Finanzwirtschaft

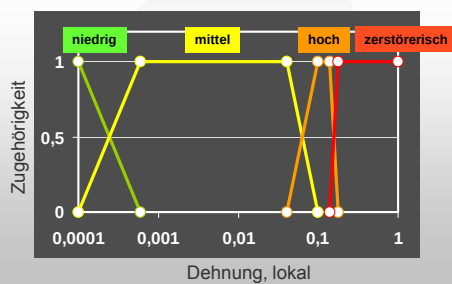


L.A. Zadeh

Fuzzy-Regler



Fuzzifizierung:

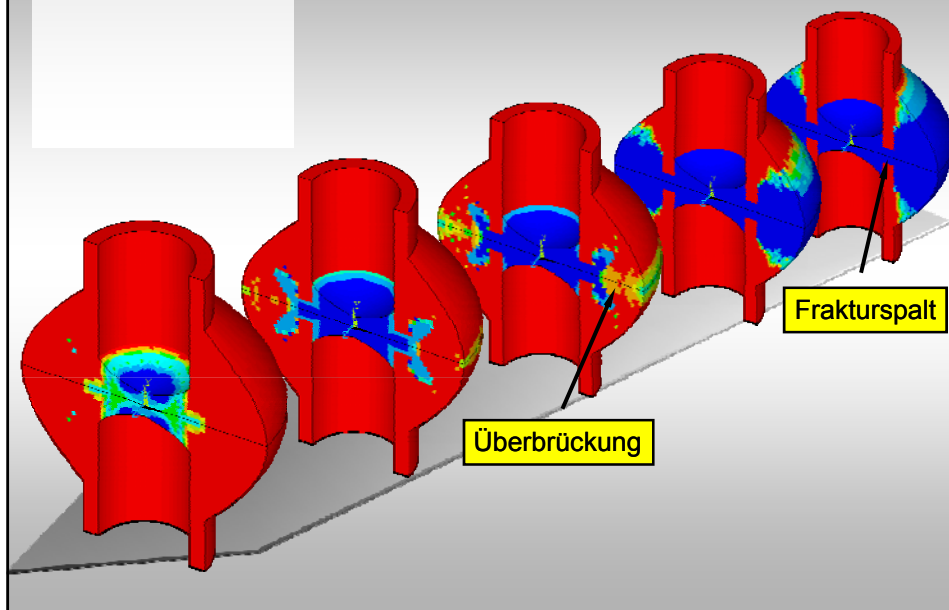


Fuzzy-Regeln:

Wenn ...
 Durchblutung = gut
 und
 Dehnung = mittel,
 dann ...
 Knochenanteil = erhöhen.

DGfB

Ergebnis: Knochenneubildung

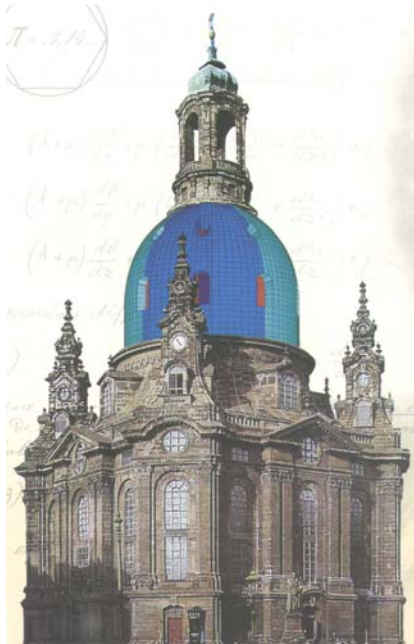
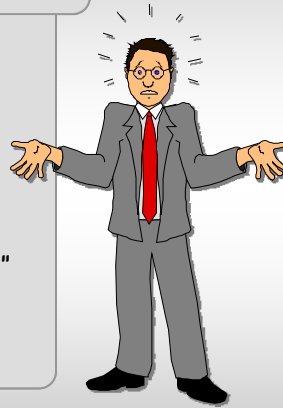


Grundbegriffe zur Finite Elemente Methode

Finite-Elemente-Methode

=

*„Numerisches Verfahren
zur näherungsweisen Lösung von
partiellen Differentialgleichungen“*



Statik, Festigkeit

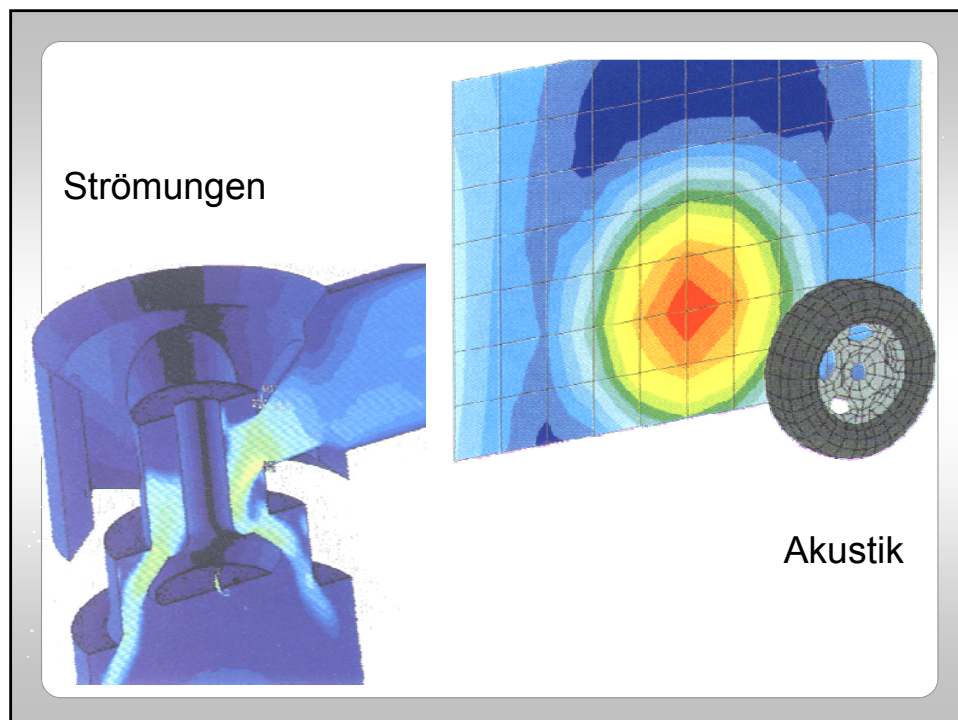
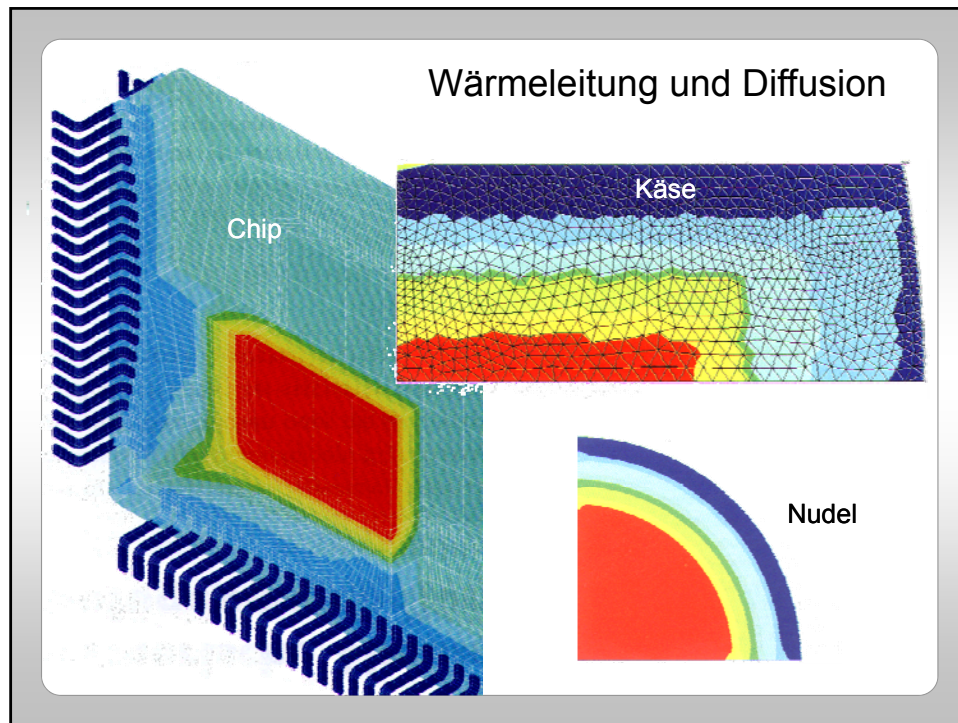
Wie stark Verformt es sich?
Hält es?

- Verschiebungen
- Spannungen, Dehnungen

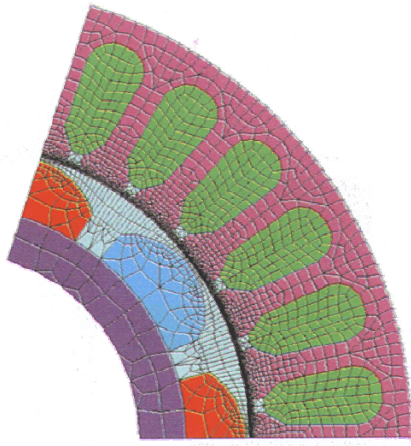
Nichtlinear:

- Kontakt, Reibung
- Plastizität, Verfestigung
- Ermüdung, Bruchmechanik

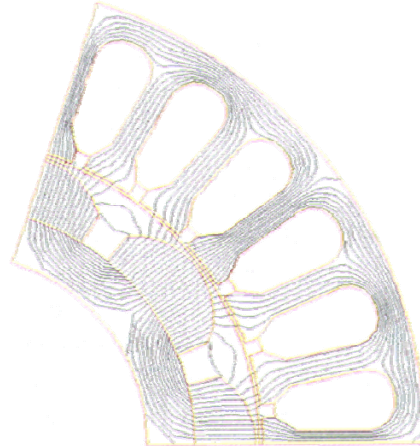
Frauenkirche, Dresden



Elektromagnetische Felder

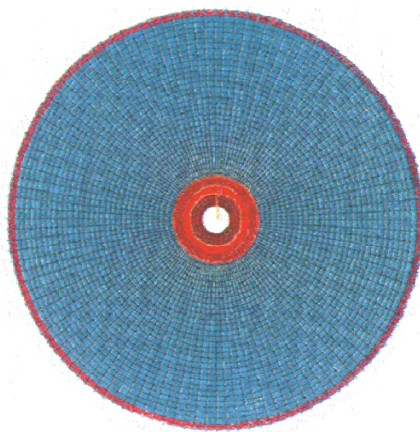


Modell: Elektromotor

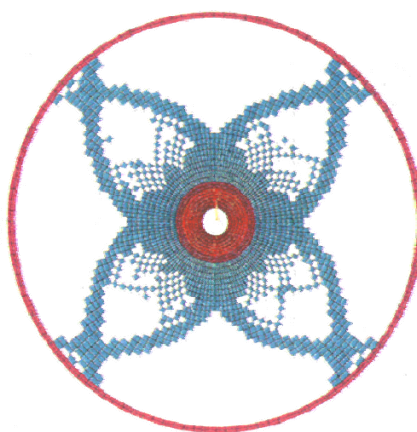


Lösung: Feldlinien

Gestaltoptimierung



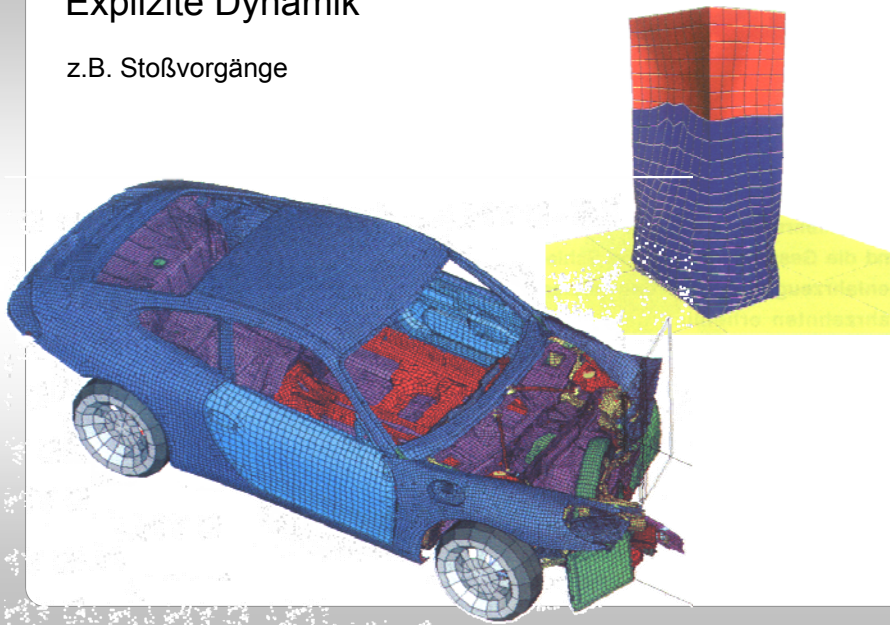
Anfangszustand: Vollscheibe



Endzustand: Speichen

Explizite Dynamik

z.B. Stoßvorgänge

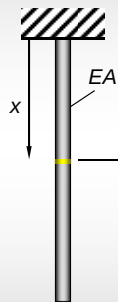


Herleitung der
Finite-Elemente-Methode
anhand eines (super-einfachen) Beispiels

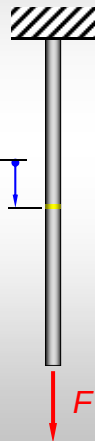
U. Simon, UFB Uni Ulm

Beispiel: Dehnstab mit Endlast

Unbelastet:
(Referenzzustand)



Belastet:



Gegeben:

Dehnstab mit ...

- Länge L ,
- Querschnitt A (konstant),
- E-Modul E (Material homogen u. konstant),
- Länge L und
- Endlast F (axial),
- oben fest eingespannt.

Gesucht:

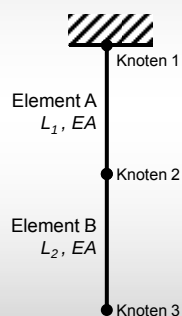
Dehnungszustand des belasteten Stabes.

Genauer: **Verschiebungsfunktion** $u(x)$.

FE-Modell des Dehnstabs

Diskretisierung: Wir teilen das Gebiet in (nur) zwei finite (= endliche, nicht differentiell kleine) **Elemente** ein. Die Elemente sind an den **Knoten** verbunden.

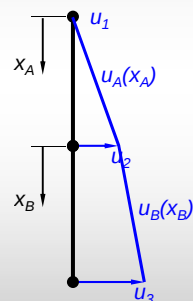
Unbelastet:
(Referenzzustand)



Belastet:
(Zustand mit Verschiebungen u)



Ansatzfunktionen (lineare) für die gesuchten Verschiebungen u .



Das gesuchte Verschiebungsfeld wird elementweise mit einfachen (linearen) **Ansatzfunktionen** beschrieben (siehe Bild). Das ist die **Grundidee** der FEM. Achtung: Die Verschiebungen u sind hier natürlich axial gerichtet, auch wenn es in den Ansatzfunktionen anders erscheint.

$$u_A(x_A) = \hat{u}_1 + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \frac{x_A}{L_A} = \hat{u}_1 \left(1 - \frac{x_A}{L_A}\right) + \hat{u}_2 \frac{x_A}{L_A}$$

$$u_B(x_B) = \hat{u}_2 + (\hat{u}_3 - \hat{u}_2) \frac{x_B}{L_B} = \hat{u}_2 \left(1 - \frac{x_B}{L_B}\right) + \hat{u}_3 \frac{x_B}{L_B}$$

Es gibt jetzt als Unbekannte nur noch die drei „Knotenverschiebungen“ $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ und keine ganze Funktion $u(x)$ mehr. Nun führen wir so genannte „**virtuelle Verschiebungen**“ (**VV**) ein. Das sind zusätzliche, gedachte, beliebige Verschiebungen $\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3$. Anschaulich: wir „wackeln“ ein bisschen an den Knoten.

Nun gilt das **Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV)**: Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (also elastische minus äußere Arbeit) auf Grund der virtuellen Verschiebungen (VV) gerade verschwindet.

$$\delta W = 0 \Rightarrow \delta W_{el} - \delta W_a = 0$$

Für unser einfaches Beispiel gilt:

Virt. elastische Arbeit = Normalkraft N mal VV

Virt. äußere Arbeit = äußere Kraft F mal VV

und die Normalkraft wiederum kann durch Ausdrücke EA/L mal Verschiebungsdifferenz ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \delta W &= N_A(\delta\hat{u}_2 - \delta\hat{u}_1) + N_B(\delta\hat{u}_3 - \delta\hat{u}_2) - F\delta\hat{u}_3 \\ &= \frac{EA}{L_A}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)(\delta\hat{u}_2 - \delta\hat{u}_1) + \frac{EA}{L_B}(\hat{u}_3 - \hat{u}_2)(\delta\hat{u}_3 - \delta\hat{u}_2) - F\delta\hat{u}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta\hat{u}_1 \left(-\frac{EA}{L_A}\hat{u}_1 + \frac{EA}{L_A}\hat{u}_2 \right) \\ &\quad + \delta\hat{u}_2 \left(\frac{EA}{L_A}\hat{u}_1 - \frac{EA}{L_A}\hat{u}_2 + \frac{EA}{L_B}\hat{u}_2 - \frac{EA}{L_B}\hat{u}_3 \right) \\ &\quad + \delta\hat{u}_3 \left(-\frac{EA}{L_B}\hat{u}_2 + \frac{EA}{L_B}\hat{u}_3 - F \right) = 0 \end{aligned}$$

Wir haben mit diesem Prinzip aber leider nur eine Gleichung für die drei unbekannten Knotenverschiebungen $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. **Schade!** Aber da gibt es einen Trick ...

Abgekürzt schreiben wir:

$$\delta \hat{u}_1(\dots)_1 + \delta \hat{u}_2(\dots)_2 + \delta \hat{u}_3(\dots)_3 = 0$$

Die virtuellen Verschiebungen können unabhängig von einander gewählt werden. Also z. B. alle außer einer einzigen gleich Null. Dann muss die eine Klammer, bei der wir die VV nicht Null hatten gleich Null sein, damit die Gleichung gelten kann. Weil wir aber die VV wählen können wie wir wollen und auch eine andere VV ungleich Null hätten wählen dürften, müssen alle drei Klammern einzeln gleich Null sein, damit die Gleichung oben dennoch immer erfüllt ist. Wir bekommen drei Gleichungen. **Juhu!**

$$(\dots)_1 = 0; \quad (\dots)_2 = 0; \quad (\dots)_3 = 0$$

... die wir auch in Matrizenform hinschreiben können:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1} & -\frac{EA}{L_1} & 0 \\ -\frac{EA}{L_1} & \frac{EA}{L_1} + \frac{EA}{L_2} & -\frac{EA}{L_2} \\ 0 & -\frac{EA}{L_2} & \frac{EA}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

oder kurz:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\hat{u}}} = \underline{\underline{F}}$$

$\underline{\underline{K}}$ - Gesamtsystem-Steifigkeitsmatrix
 $\underline{\underline{\hat{u}}}$ - Vektor der unbekannten Knotenverschiebungen
 $\underline{\underline{F}}$ - Vektor der Knotenkräfte

Dieses ist das klassische Grundproblem einer strukturmekanischen, linearen FE-Analyse. Ein **lineares Gleichungssystem** für die unbekannten Knotenverschiebungen

Wir müssen noch die **Randbedingungen** berücksichtigen. Der Stab ist am oberen Ende fest eingespannt. Knoten 1 kann sich nicht verschieben:

$$\hat{u}_1 = 0$$

Damit können wir die erste Zeile im Gleichungssystem streichen, denn dies ist ja nun gar keine Unbekannte mehr. Die erste Spalte können wir auch streichen, denn diese Elemente würden ja ohnehin mit einer Null multipliziert werden. Es bleibt also ...

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1} + \frac{EA}{L_2} & -\frac{EA}{L_2} \\ -\frac{EA}{L_2} & \frac{EA}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Wir **lösen** das Gleichungssystem und erhalten die Knotenverschiebungen

$$\hat{u}_2 = \frac{L_A}{EA} F \quad \text{und} \quad \hat{u}_3 = \frac{L_A + L_B}{EA} F$$

Hier entspricht die FE-Lösung exakt der (bekannten!) analytischen Lösung. Das ist bei komplizierteren Fällen in der Regel nicht mehr der Fall. Gewöhnlich gilt dann, dass die numerische Lösung sich mit zunehmender Anzahl von finiten Elementen immer besser an die exakte Lösung annähert. Bei richtig komplizierten Problemen gibt es gar keine analytische Lösung mehr; für solche Fälle braucht man ja die FEM! Aus den Knotenverschiebungen kann man in einer Nachlaufrechnung durch differenzieren die Dehnungen und auch die Spannungen bestimmen. Z. B. ...

$$\varepsilon_A(x_A) = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{L_A} \quad \text{Dehnungen}$$
$$\varepsilon_B(x_B) = \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_2}{L_B}$$

Fertig!

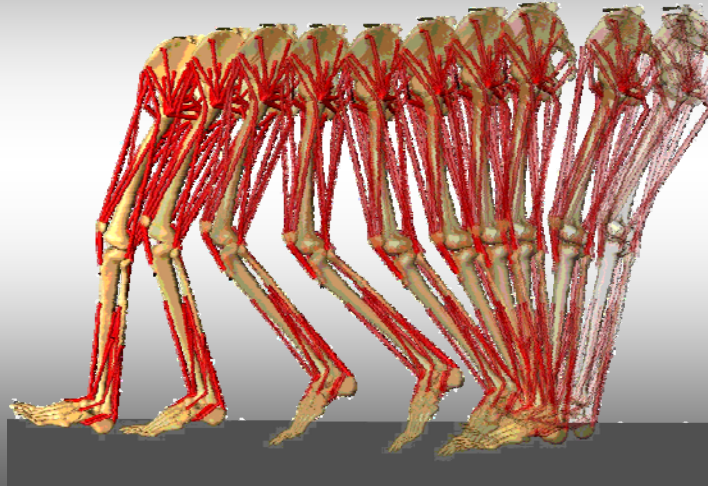
Zusammenfassung

Die **wesentlichen Schritte** und Ideen der FEM sind also:

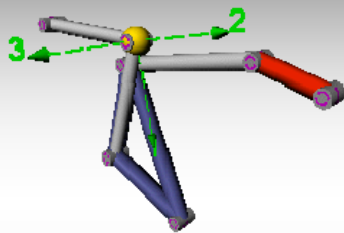
- Diskretisierung: Einteilung des Gebiets in finite Elemente
- Einfache Ansatzfunktionen (Polynome) für die gesuchte Größe innerhalb der Elemente wählen. Man reduziert das Problem auf endlich viele Unbekannte.
- Mechanisches Prinzip (der Mathematiker sagt „schwache Formulierung“) anschreiben und
- daraus Gleichungssystem für unbekannte Knotengrößen ableiten
- Gleichungssystem lösen

Viele dieser Schritte werden bei der Benutzung eines kommerziellen FE-Programms nicht mehr sichtbar. Mit der Wahl einer Analyseart und eines Elementtyps hat man die Ansatzfunktionen implizit bereits gewählt. Das mechanische Prinzip wird lediglich bei der Entwicklung des Programmcodes selbst benutzt um einen programmierbaren Algorithmus für den Aufbau des Gesamt-Gleichungssystems zu entwickeln. Während der Nutzer das FE-Programm benutzt, wird kein PVV oder ähnliches ausgeführt

Mehrkörper-Systeme (MKS) in der Biomechanik



Mehrkörpersysteme (MKS):

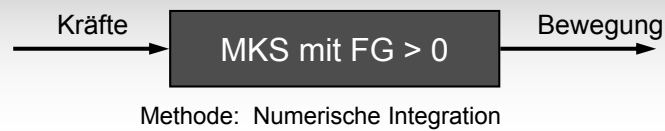


Quelle: IFM, TU Chemnitz, alaska

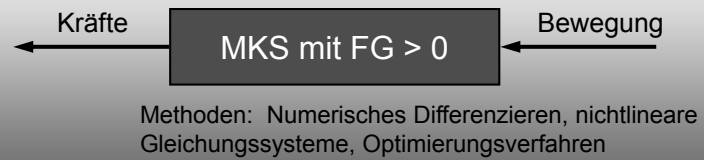
- Starrkörpern (mit Massen, Massenmomenten)
- Gelenken (Bindungen)
- FG Gesamtsystem = Anzahl Körper x 6 – Anzahl Bindungen

VERGLEICH: Vorwärts-Dynamik / Inverse Dynamik

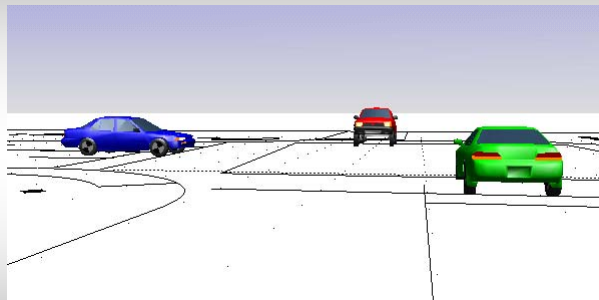
Vorwärts-Dynamik



Inverse Dynamik



Beispiel zur Vorwärts-Dynamik: "Unfallhergang"

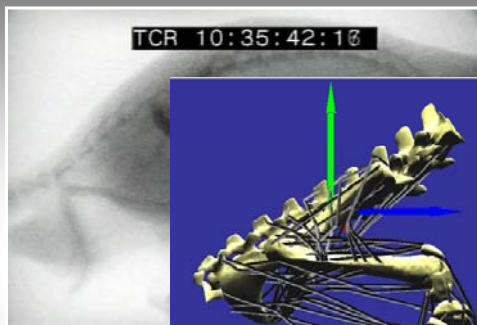


Beispiel zur Vorwärts-Dynamik: „Schleudertrauma“



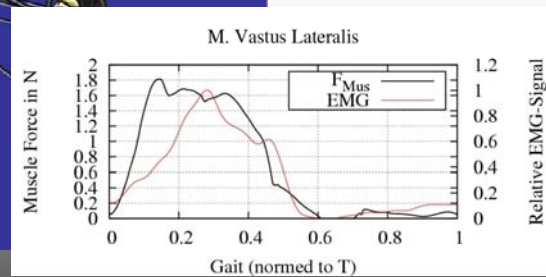
Annette Kettler

Beispiel zur Inversen Dynamik: „Ratten-Gang“



Erik Forster
Uwe Wolfram

UFBSIM



Software

Numerische Methoden, allgemein:

MATLAB	Universelles Numerik-Programm (eigene Programmiersprache) http://www.mathworks.com
NAG	Große Sammlung sehr leistungsstarker Routinen für Fortran oder C http://www.nag.co.uk (Vorcompilierte Object-Libraries)
Numerical Recipes	Große Sammlung leistungsstarker Routinen für Fortran, C, C++ http://www.nag.co.uk (Bücher und Quellcode)

Finite-Elemente-Programme:

ABAQUS	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.abagus.com
ANSYS	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.ansys.com Aktuelle Hochschulversion (128.000 Elemente): 7.0 Deutscher Vertrieb: Fa. CADFEM, http://www.cadfem.de
MSC.Marc / Mentat	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.mscsoftware.com
CAMPUS	Für Lehre frei verfügbares, kleines FE-Programm von Prof. Dankert, FH Hamburg. Für Fachwerksberechnungen. Mit Quellcode FEMSET. http://www.fh-hamburg.de/rzbt/dnksoft/campus
MATLAB (PDE)	PDE Toolbox: FE für 2D Probleme http://www.mathworks.com

Software

Fuzzy-Logic-Programme:

MATLAB	Fuzzy-Logic-Toolbox: leicht zu bedienen http://www.mathworks.com
--------	--

Mehr-Körper-Simulations-Programme (MKS):

MSC.ADAMS	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket http://www.mscsoftware.com
DADS	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket http://www.lmsintl.com/
MADYMO	Software-Paket zur Insassensicherheit, „Virtuelle-Dummies“ http://www.madymo.com (TNO, Niederlande)
alaska	Modellierung und Simulation mechatronischer Systeme http://www.tu-chemnitz.de/ifm (Institut für Mechatronic, TU Chemnitz)
SIMPACK	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket, Intec GmbH (DLR) http://www.simpack.de

Programme zur Inversen Dynamik (Ganganalyse):

ANYBODY	Simulation muskulo-skelettaler Systeme, Aalborg/Dänemark http://anybody.auc.dk
UFBSIM	Simulation muskulo-skelettaler Systeme (von Erik Forster), Institut für Unfallchirurgische Forschung und Biomechanik, Universität Ulm http://www.biomechanics.de , erik.forster@medizin.uni-ulm.de

Literatur

Allgemein

- Schwarz, H.R.: „Numerische Mathematik“, Teubner 1997
Klassiker der numerischen Mathematik, 37,- €
- Dankert, H. und Dankert, J.: „Technische Mechanik“; Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik, mit Programmen; 2. Aufl.; Teubner, 1995.
Lehrbuch mit numerischer Anwendung u.a. FEM
<http://www.fh-hamburg.de/rzbt/dnksoft/campus/>
(Scripte, auch „Num. Methoden“ zum Herunterladen)

Finite-Elemente-Methode (FEM):

- Zienkiewicz, O.C.: „Methode der finiten Elemente“; Hanser 1975 (engl. 2000).
„Bibel“ der FEM
- Bathe, K.-J.: „Finite-Elemente-Methoden“; erw. 2. Aufl.; Springer 2001
Lehrbuch (Theorie) , 100,- €
- Müller, G. und Groth, C.: „FEM für Praktiker, Band 1: Grundlagen“, mit ANSYS/ED-Testversion (CD). (Band 2: Strukturdynamik; Band 3: Temperaturfelder)
Übungsbuch, sehr gut für den Einstieg, 98,- €



Literatur

Fuzzy-Logic:

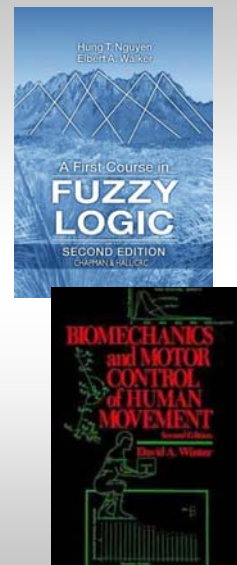
- Drösser, D.: „Fuzzy Logic – Methodische Einführung in krauses Denken“; rororo; 1996.
Taschenbuch, gut zu lesen
- Hung T. u.a.: „A First Course in Fuzzy Logic“; 2. Aufl.; CRC Press; 1999.
80,- €

Mehr-Körper-Simulation (MKS):

- Haug, E.J.: „Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems“; 1989.
Vom DADS-Entwickler geschrieben, sehr gut
- Nikravesh, P.E.: „Computer aided analysis of mechanical systems“; Prentice-Hall; 1988.

Inverse Dynamik (Ganganalyse):

- Nigg, B.M., Herzog, W.: „Biomechanics of the Musculo-skeletal System“; Wiley, 1994.
- Winter, D.A.: „Biomechanics and motor control of human movement“; Wiley, 1990.



Hinweise und Warnungen

- Numerische Methoden (Programm-Pakete) sind Werkzeuge, keine Lösungen
- Vorsicht vor bunten Bildern. Es gilt wie überall: „garbage in garbage out“ (GiGo).
- Systemparameter
- Verifikation
- Modelle sind immer fragespezifisch

