Dipl.-Math. Bernhard Wieland, Dr.-Ing. Ulrich Simon

Handout: Anisotropie

Teil I: Isotrope Werkstoffe

Bisher haben wir isotrope (von griechisch *isos* gleich; *tropos* Drehung, Richtung) Materialien behandelt, d.h. Materialien mit orientierungs-unabhängigen Eigenschaften. Steifigkeit und Querkontraktion sind also in alle Richtungen gleich. Die Materialeigenschaften können mit zwei unabhängigen Elastizitätskonstanten beschrieben werden, z.B. dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν .

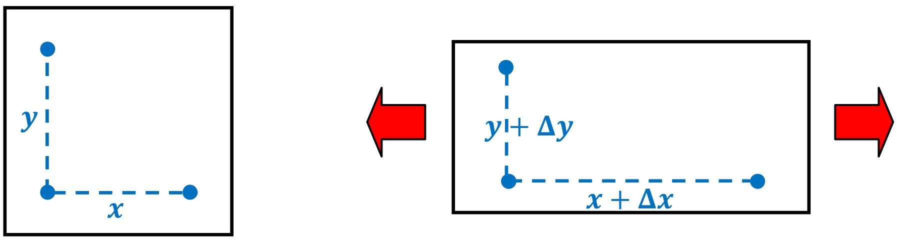
Lineares, isotropes Werkstoffgesetz mit Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz}\end{pmatrix},$$

bzw. mit Nachgiebigkeitsmatrix (Inverse der Steifigkeitsmatrix):

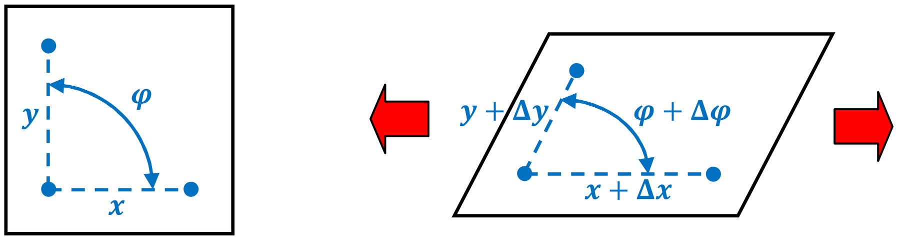
$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz}\end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix}1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{pmatrix}.$$

Die Querkontraktionszahl beschreibt die Dehnungs-Querdehnungs-Kopplung, d.h. den Zusammenhang der relativen Längenänderung in Zugrichtung zu der relativen Längenänderung orthogonal zur Zugrichtung.



Teil II: Anisotrope Werkstoffe

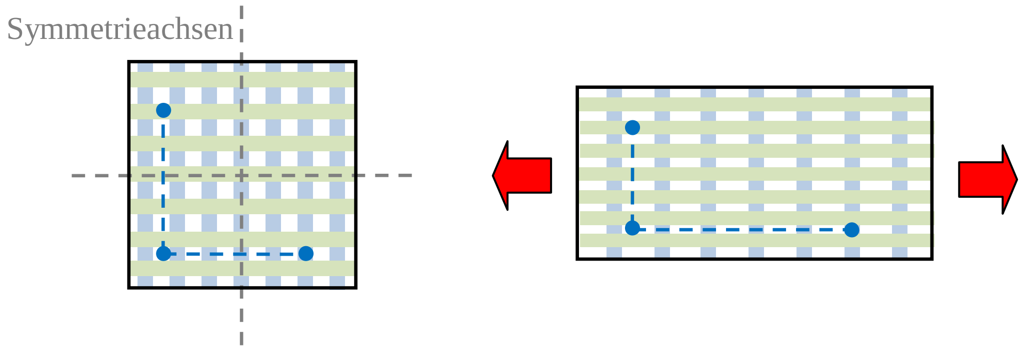
Anisotrope Materialien haben richtungsabhängige Elastizitätseigenschaften. Vollständig anisotrope Materialien haben keine Symmetrieebenen im Material. Neben Dehnungs-Querdehnungs-Kopplungen weisen vollständig anisotrope Materialien auch Dehnungs-Schiebungs-Kopplungen auf, d.h. Kopplungen zwischen Normaldehnungen und Scherdehnungen. Es entsteht ein Verzug (siehe Bild).



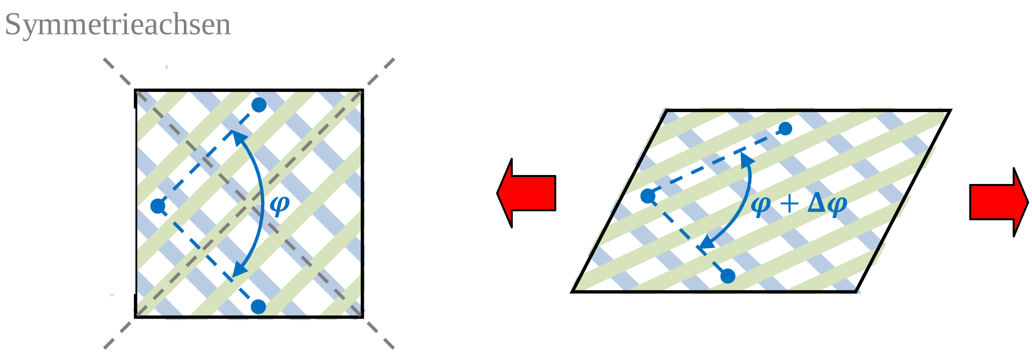
Die Steifigkeitsmatrix ist hier voll besetzt, aber weiterhin symmetrisch, und kann daher durch insgesamt 21 unabhängige Elastizitätskonstanten beschrieben werden.

Teil III: Orthotrope Werkstoffe

Orthotropie ist ein Spezialfall der Anisotropie. Der Name setzt sich zusammen aus den Wörtern *orthogonal* und *anisotrop*. Im Material existieren hier drei Symmetrieebenen. Orthotrope Materialien haben zwar richtungsabhängige Elastizitätseigenschaften, bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems treten allerdings keine Kopplungen zwischen Dehnungen und Scherdehnungen auf. D.h. belastet man einen rechteckigen orthotropen Werkstoff (z.B. ein Gewebe) in den Symmetrieachsen, so tritt keine Dehnungs-Schiebungs-Kopplung auf. Er bleibt rechteckig.



Belastet man den Werkstoff dagegen außerhalb der Symmetrieachsen, so treten Schubverzerrungen auf und es entsteht ein Parallelogramm.



Die grünen Fasern sind nachgiebiger und dehnen sich daher im oberen Beispiel mit Belastung in Faserrichtung stärker als die grauen. Im zweiten Beispiel mit geändertem Belastungswinkel ist die Dehnung in Zugrichtung weniger stark ausgeprägt, da nun die steiferen blauen Fasern den Werkstoff in Zugrichtung verstärken.

Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch und hängt nun von 9 unabhängigen Parametern ab.

Man benötigt zum einen die E-Moduln E_x, E_y und E_z in die unterschiedlichen Koordinatenrichtungen, also die Steifigkeiten entlang der verschiedenen Fasern.

Weitere Parameter sind gegeben durch die Querkontraktionszahlen ν_{xy}, ν_{xz} und ν_{yz} zwischen den einzelnen Richtungen. Die Querkontraktionszahl ν_{ij} gibt also das Verhältnis der relativen Längenänderungen in i- und j-Koordinatenrichtung an bei Belastung entlang einer der Richtungen.

Zusätzlich sind nun noch Schubmoduln G_{xy}, G_{xz} und G_{yz} anzugeben (auch Gleitmodul, G-Modul, engl. shear modulus). Diese beschreiben das Verhältnis zwischen Schubspannungen und Schubverzerrungen. Da wir im orthotropen Fall entlang der Symmetrieachsen keine Kopplung zwischen Dehnungen und Schubverzerrungen haben, gilt $\tau_{ij} = G_{ij}\varepsilon_{ij}$.

Nachgiebigkeitsmatrix:

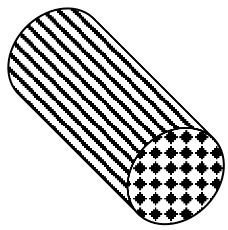
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & & & \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & & & \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & & & \\ & & & 1/G_{xy} & & \\ & & & & 1/G_{yz} & \\ & & & & & 1/G_{xz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Bedeutung in der Konstruktion

Orthotrope Werkstoffe bieten den Vorteil der räumlich unterschiedlichen Elastizitätsmoduln ohne den Nachteil der Dehnungs-Schiebungs-Kopplung. Beispiele sind Holz, Textilien, Faser-Kunststoff-Verbunde, biologische Gewebe oder gezielte Verstärkungen weicher Materialien durch Stränge, Drähte und Geflechte aus steiferem Material.

Teil IV: Transversale Isotropie

Transversal isotrope Materialien sind ein weiterer Spezialfall der Orthotropie. Es gibt zusätzlich eine Achse, um die diese Werkstoffe gedreht werden können, ohne dass sich ihre Elastizitätseigenschaften verändern. Anschaulich bedeutet dies, dass Steifigkeiten und Querkontraktionen in der Ebene senkrecht zu dieser Achse gleich sind, in der Ebene also isotrope Materialeigenschaften vorgefunden werden. Ein Beispiel für solch ein Material ist insbesondere Holz, wie in der Abbildung skizziert. Die Elastizitätseigenschaften des Holzes ändern sich mit Drehung um die Längsachse nicht, bzw. vernachlässigbar wenig.



Steifigkeitsmatrix

Aufgrund der Isotropie in den Ebenen orthogonal zur Drehachse verringert sich die Anzahl der unabhängigen Materialkonstanten zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix auf 5. Nimmt man die x-Achse als Drehachse, so ergibt sich

- $E_y = E_z$
- $\nu_{xy} = \nu_{xz}$
- $G_{xy} = G_{xz}$

Außerdem gilt in diesem Fall der Zusammenhang

- $G_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})}$ bzw.
- $\nu_{yz} = \frac{E_y}{2G_{yz}} - 1$,

sodass also insgesamt die fünf verbleibenden Parameter E_x, E_y, G_{xy}, G_{yz} und ν_{xy} für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix (oder auch ν_{yz} statt G_{yz}) ausreichen.

Nachgiebigkeitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & & & \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & & & \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & & & \\ & & & 1/G_{xy} & & \\ & & & & \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})} & \\ & & & & & 1/G_{xz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$