ULMER ZENTRUM FÜR WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

Mathematische Modellierung und Simulation

in der Mechanik 2

–

Dynamik

MMSM 2

Dr.-Ing. Ulrich Simon

Dipl.-Math. Bernhard Wieland

Sommersemester 2011

Inhaltsverzeichnis

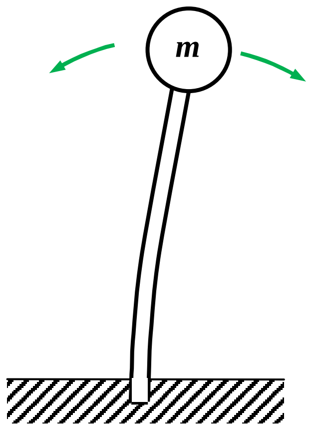
1 Einführendes Beispiel

Wir betrachten ein elastisches Lineal, auf dem an einem Ende eine Extramasse montiert wurde. Dieses wird in Schwingung gebracht.

Gesucht: Eigenfrequenz der Schwingung

1.1 Abstraktion

Blick von Oben



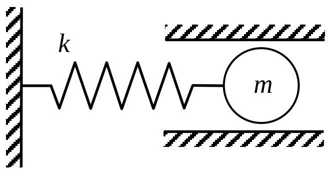
Mechanisches Ersatzsystem:

- Elastischer masseloser Balken
- Feste Einspannung
- Punktmasse m

Vereinfachungen:

- Kein Luftwiderstand
- Keine sonstigen Reibungen und Dämpfungen
- Keine Erdanziehungs- oder andere Anziehungskräfte

Ersatzmodell



Federsystem:

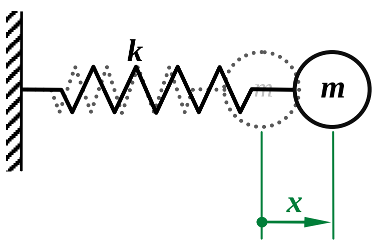
- Federsteifigkeit k
- Reibungsfreier Kontakt zu Führungen

Vereinfachungen:

- Vertikale Bewegung wird vernachlässigt

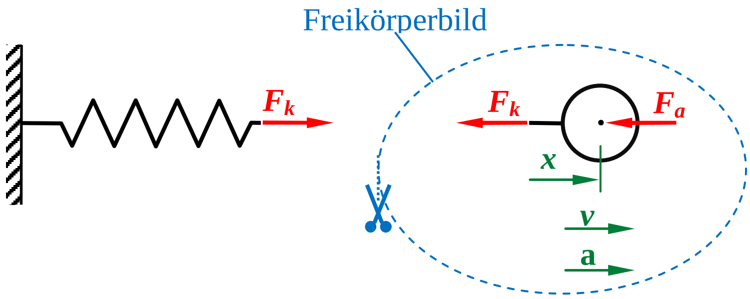
1.2 Kinematik

Einführung der Koordinate x:



Grau:	Referenzlage (Feder entspannt)
Schwarz:	ausgelenkte Lage
x:	Auslenkung der Punktmasse aus Referenzlage

1.3 Die Bewegungsgleichung



mit Variablen und Kräften

- $v = \dot{x}$
- $a = \dot{v} = \ddot{x}$
- Federkraft $F_k = kx$
- Trägheitskraft $F_a = ma$

Wir tragen Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a an. Beide ergeben sich durch Ableitung der Wegkoordinate x nach der Zeit. Sie zählen daher ebenfalls nach rechts positiv.

Die Punktmasse wurde von der Feder „abgeschnitten“ und die entsprechenden Schnittkräfte F_k wurden an beiden Schnittufern angetragen. Die Masse der Kugel wurde ebenfalls (aus der starren aber masselosen „Kugelhülle“) herausgeschnitten und durch die Trägheitskraft F_a ersetzt. Die Trägheitskraft – das sagt schon der Name – muss entgegen der positiv zählenden Beschleunigung a wirken, also nach links.

Mechanisches Prinzip: Kräftegleichgewicht am Freikörperbild (FKB)

Das mechanische Prinzip des Kräftegleichgewichts besagt, dass alle am Körper angreifenden Kräfte in Koordinatenrichtung sich gegenseitig aufheben. Anders ausgedrückt heißt das, die Summe der Kräfte in Koordinatenrichtung ergibt Null,

$$\sum_i F_i = 0,$$

$$\Longrightarrow \; -F_k - F_a = -m\ddot{x} - kx = 0,$$

$$\Longrightarrow \; m\ddot{x} + kx = 0.$$

Wir erhalten also eine lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades in der Zeit t mit konstanten Koeffizienten.

1.4 Analytische Lösung

Man erhält die allgemeine analytische Lösung

$$x(t) = \hat{x}\,\cos(\omega_0\, t + \varphi_0)$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ die Eigenfrequenz angibt. Die Phasenverschiebung φ_0 und die Amplitude $\hat{x}$ können an zwei Anfangsbedingungen,

$$x(0) = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0,$$

angepasst werden. Die Periodendauer T der Schwingung ist gegeben durch $T = 2\pi/\omega_0$.

1.5 Numerische Lösung

Mit Hilfe der Simulations-Toolbox SIMULINK von Matlab kann das mechanische System sehr schnell abgebildet und die Schwingungen durch numerische Integration berechnet werden.

2 Allgemeines

2.1 Ziel der Vorlesung

Die Studierenden sollen typische praktische Fragestellungen aus der Mechanik (Dynamik), wie sie z.B. in einem Maschinenbaubetrieb auftauchen könnten, verstehen und in die Mathematik übersetzen können. Dies beinhaltet die Erstellung geeigneter Modelle unter "vernünftigen" Annahmen und Vereinfachungen sowie die Auswahl und Benutzung passender Werkzeuge (mathematische Methoden, Programme) für die numerische Lösung, die für Praktiker verständlich aufbereitet und dargestellt werden sollen.

2.2 Zur Gliederung der Vorlesung

Die Vorlesung MMSM 2 gliedert sich in die folgenden Gebiete:

Kinematik

Die *Kinematik* (griechisch *kinema* = Bewegung) beschreibt und analysiert Bewegungen ohne die verursachenden oder dabei entstehenden Kräfte zu betrachten. Zum Merken: Kinematik = zeitveränderliche Geometrie.

Kinetik / Dynamik

In der *Kinetik* (griechisch *kinetikos* = zur Bewegung gehörig) wird die Wechselwirkung zwischen der Bewegung eines Körpers und den Kräften die auf ihn wirken untersucht.

Der Begriff *Dynamik* (griechisch *dynamis* = Kraft) beinhaltet im ursprünglichen Sinn Statik und Kinetik, wird heute aber meist synonym zur Kinetik verwendet.

Kontinuumsschwingungen

Die *Kontinuumsmechanik* handelt vom Verformungsverhalten verschiedener Körper unter Einfluss von Kräften und Momenten. Im Speziellen werden wir das Schwingverhalten von Körpern betrachten.

Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten erhalten wir in der Kontinuumsmechanik Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden und somit nicht mehr ausschließlich gewöhnliche sondern auch partielle Differentialgleichungen.

3 Grundlagen aus der Statik

(Kurze Wiederholung aus MMSM 1)

3.1 Allgemeines zu Größen, Dimensionen, Einheiten

Der Wert einer physikalischen Größe erscheint als Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Größe = Zahlenwert · Einheit

Beispiel: *Länge L = 2 · m = 2 m*

Die „Unsitte“, die Einheiten bei der Beschriftung von Diagrammachsen und Tabellenköpfen in eckige Klammern zu setzen (falsch: *Länge L [m]*), entstammt einem Missverständnis. Die Norm empfiehlt die Schreibweisen:

richtig: *Länge L / m* oder *Länge L in m*

Beim Rechnen sollten die Einheiten genau wie Faktoren berücksichtigt und bis zum Ergebnis „durchgeschleift“ werden.

Die für die Mechanik wichtigen Dimensionen (oder Basisgrößen) sind *Länge, Masse, Zeit*. Dafür werden nach internationalem Standard (SI) die drei Basiseinheiten

m (Meter), kg (Kilogramm), sec (Sekunde)

verwendet.

3.2 Kraft, Moment und Freikörperbild

Kraft: Der Begriff *Kraft* ist in der Mechanik nicht streng definiert. Newton definierte die Kraft als Ursache für eine Beschleunigung (Bewegungsänderung) eines Körpers.

Zweites Newtonsches Axiom:

Kraft = Masse · Beschleunigung oder $F = m \cdot a$.

Kräfte können also nicht unmittelbar gemessen oder beobachtet werden sondern nur über die von ihnen verursachte Beschleunigung bestimmt werden. Die Einheit der Kraft ist das *Newton*:

$$1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$$

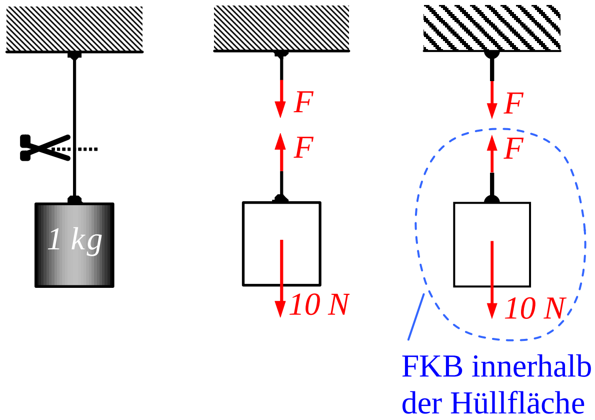
Moment: Ähnlich zur Definition Kraft als Ursache für geradlinige Beschleunigungen ist das *Moment* (oder *Drehmoment*) definiert als Ursache für eine Drehbeschleunigung. Ein Moment kann auch durch ein Kräftepaar (F, h) aus Kraft F und Hebelarm h bestimmt werden, z.B. beim Drehen eines Schraubenschlüssels. Es gilt der Zusammenhang

Moment = *Kraft* · *Hebelarm* oder $M = F \cdot h$.

Die Einheit des Momentes ist daher *Newton-Meter*:

$$1\,Nm = 1\,kg \cdot m^2/s^2$$

Das Schnittprinzip von Euler: Kräfte und Momente treten nicht offen zu Tage. Sie sind immer Wechselwirkungen zwischen zwei (Teil-) Körpern. Um sie für eine Rechnung zugänglich zu machen führt man einen gedanklichen Schnitt durch und trennt die beiden Teilsysteme voneinander. An den Schnittufern müssen Schnittkräfte und -momente angetragen werden, um die Wechselwirkungen zwischen den Körpern äquivalent zu ersetzen.



Die Schnittkräfte und -momente an den beiden Schnittufern sind gleich groß und einander entgegengesetzt: 3. Newtonsches Axiom: *actio* = *reactio*. Die Masse wird aus den Körpern herausgeschnitten und durch entsprechende Kräfte (in unserem Fall die Gewichtskraft von 10 N) ersetzt.

Freikörperbild (FKB): Ein Freikörperbild ist ein in der Skizze völlig freigeschnittenes Teilsystem. Zur Kontrolle legt man eine geschlossene *Hüllfläche* um das Teilsystem, den Bilanzraum. Überall wo die Hüllfläche irgendwelche Teile der Struktur durchläuft muss geschnitten werden und Schnittkräfte und -momente müssen eingetragen werden.

3.3 Spannung, Dehnung, Materialgesetze

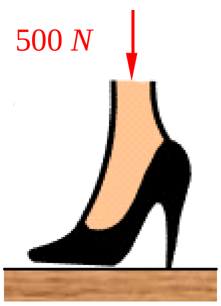
Spannung: Die äußere *Belastung*, die ein Körper erfährt, sagt noch nichts über seine innere *Beanspruchung* aus. Um zu beurteilen, wie stark das Material beansprucht wird, ob es hält oder nicht, muss auch die Fläche berücksichtigt werden, über die eine Kraft übertragen wird. Diese, auf die Fläche bezogene Kraft, ist die *Spannung*.

Zum Merken:

Spannung = *„verschmierte" Schnittkraft*,

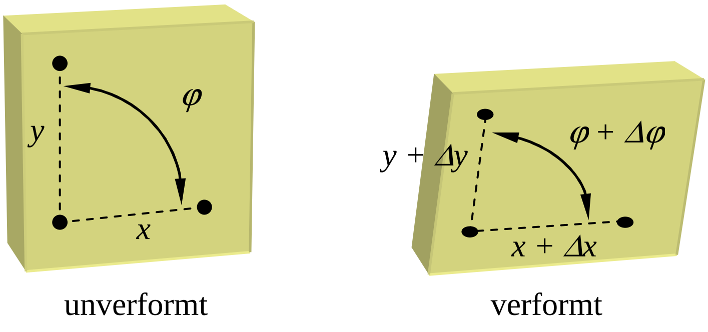
Spannung = *Kraft pro Fläche* oder $\sigma = F/A$

Spannungen sind wie die Kräfte, von denen sie abgeleitet werden, *vektorielle Größen*. Sie besitzen eine Richtungseigenschaft und werden mit Pfeilen dargestellt. Die Einheit der Spannung ist z.B.:



Mega-Pascal:	$1\,MPa$	$= 1\,N/mm^2$
Pascal:	$1\,Pa$	$= 1\,N/m^2$

Dehnung: Alle belasteten Körper erfahren eine Änderung ihrer Form. Diese Formänderung misst man im Vergleich zu einem Referenzzustand. Um die lokalen Dehnungen zu definieren, betrachten wir drei Punkte in einem infinitesimal kleinen Element eines Körpers:



Im verformten Zustand haben sich Abstände und Winkel zwischen den Punkten verändert. Daraus können drei Dehnungsgrößen für die betrachtete Ebene abgeleitet werden:

Normaldehnung in x-Richtung:	$\varepsilon_x = \Delta x/x$
Normaldehnung in y-Richtung:	$\varepsilon_y = \Delta y/y$
Schubverzerrung:	$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\Delta\varphi$

Zum Merken:

Dehnung = relative Längenänderung (Winkeländerung)

Die Dehnung ist einheitenlos.

Materialgesetze: Materialgesetze beschreiben das mechanische Verhalten der Stoffe. Sie liefern eine Beziehung zwischen dem lokalen Spannungszustand und dem lokalen Dehnungszustand innerhalb eines Körpers. Ein *steifer* Werkstoff zeigt bei gleicher Spannung eine geringere Dehnung als ein *weicher* Werkstoff. Das einfachste Materialgesetz beschreibt ein linear-elastische, isotropes Verhalten (Hooksches Gesetz):

- *Linear* heißt, eine doppelt so große Spannung führt zu einer doppelt so großen Dehnung.
- *Elastisch* heißt, der Werkstoff verformt sich reversibel. Nimmt man die Spannungen weg verschwinden auch die Dehnungen wieder vollständig.
- *Isotrop* heißt richtungsunabhängig. z.B. ist die Steifigkeit in alle Richtungen gleich groß.

Der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung wird durch den Elastizitäts-Modul (E-Modul, Young's modulus) *E* beschrieben.

Hooksches Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Da die Dehnung keine Einheit besitzt, hat der E-Modul dieselbe Einheit wie die Spannung, also *Pascal* bzw. *Mega-Pascal*. Eine weitere Materialeigenschaften ist die Querkontraktionszahl (Poisson's ratio) ν, definiert als negatives Verhältnis aus relativer Dickenänderung zur relativen Längenänderung $\nu = -\varepsilon_{Dicke}/\varepsilon_{Länge}$.

4 Kinematik

Die Kinematik (griechisch *kinema* = Bewegung) beschreibt und analysiert Bewegungen von Körpern, ohne die verursachenden oder dabei entstehenden Kräfte zu betrachten.

Oft werden die beteiligten Körper zur Vereinfachung als starr betrachtet. Dann kann man die Bewegung des Systems mit endlich vielen Lage-Variablen beschreiben.

Kennt man die Lage der beteiligten Körper zu jedem Zeitpunkt, so ist die Bewegung vollständig beschrieben. Kinematik ist also **„zeitveränderliche Geometrie“**. Typische Anwendungsgebiete in der Biomechanik sind die *Ganganalyse* und die *Gelenkkinematik*.

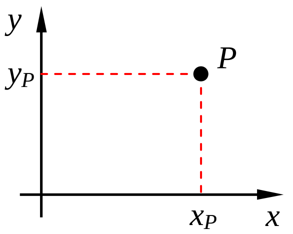
Zum Merken:

Kinematik = *zeitveränderliche Geometrie*.

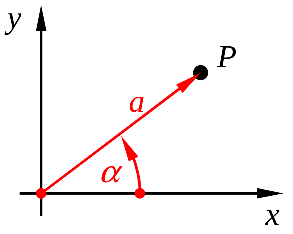
4.1 Koordinatensysteme

In der Geometrie gilt es Wege s und Winkel φ zu messen. Diese sind so genannte *Zwei-Punkt-Größen*, d.h. sie werden zwischen zwei Punkten und nicht wie die *Ein-Punkt-Größen* (z.B. Temperatur) an einem Punkt im Raum ermittelt. Dies ist ein praktisch wichtiger Aspekt. Bevor man die Lage eines Körpers messen kann, muss man Referenzpunkte festlegen, z.B. in Form eines Koordinatensystems. Ein Koordinatensystem (für den drei-dimensionalen Raum) ist durch die Lage seines Ursprungspunktes und dreier (verschiedener) Richtungen definiert. In der Ebene (zwei-dimensionaler Raum) reichen zwei verschiedene Richtungen aus. Für die Ebene sind zwei Typen von Koordinatensystemen beliebt:

a) Kartesisches Koordinaten-System: Durch die Definition zweier zueinander senkrechter Achsen, die aus dem Ursprung hervorgehen. Ein Punkt P hat nun zwei Koordinaten, dass sind die Distanzen $\boldsymbol{x_P}$ und $\boldsymbol{y_P}$, die man in Richtungen der x-Achse bzw. y-Achse messen kann.



b) Polares Koordinaten-System: Ein Punkt P hat wiederum zwei Koordinaten: Eine Winkellage α relativ zur x-Achse und einen Abstand a vom Ursprung.



Absolute und relative Koordinaten:

Absolute Koordinaten vermessen die Lage eines Körpers in einem so genannten *Inertialsystem*, also gegenüber einer feststehenden, nicht beschleunigten Umgebung.

Relative Koordinaten vermessen die Lage eines Körpers gegenüber einem anderen bewegten und beschleunigten Körper. Mit einem *Goniometer* zwischen Femur (Oberschenkel) und Tibia (Schienbein) beispielsweise werden beim Gang relative Koordinaten aufgezeichnet.

Beispiel Ganganalyse:

Bei der Ganganalyse spielen die Winkel eine besondere Rolle, da die Stellungen der Gliedmaßen zueinander mit Winkeln beschrieben werden können (vgl. ***Abb. 1***). Im Bild wird die Winkellage des Unterschenkels mit der *absoluten Koordinate* φ_0 gegenüber der Horizontalen und mit der *relativen Koordinate* φ_1 gegenüber dem Oberschenkel vermessen. Physikalisch relevant ist die Größe $\ddot{\varphi}_0$, da sie zu einer echten physikalischen Beschleunigung und damit zu Trägheitskräften bzw. -momenten führt.

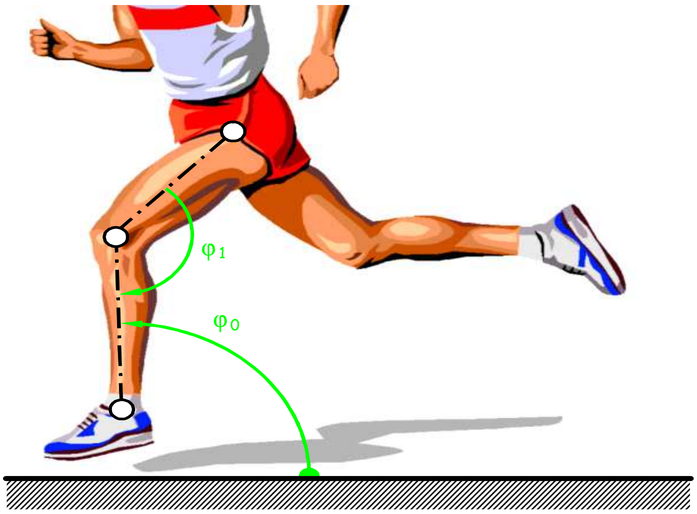


Abb. 1: Absolute und relative Koordinaten.

4.2 Translation und Rotation

Man unterscheidet zwei verschiedene Arten von Bewegungen: Translationen und Rotationen. Während Translationen (Verschiebungen) mit Wegen beschrieben werden, erfassen Winkel Rotationen (Verdrehungen, Kippungen).

Bei der *Translation* bewegen sich alle Punkte eines Körpers auf parallelen Bahnen gleicher Länge. Der Körper erfährt eine Parallel-Verschiebung (vgl. *Abb. 2*).

Bei der *Rotation* bewegen sich alle Punkte eines Körpers auf Kreisbahnen. Der zurückgelegte Weg ist für Punkte, die sich weiter vom Drehzentrum entfernt befinden, größer.

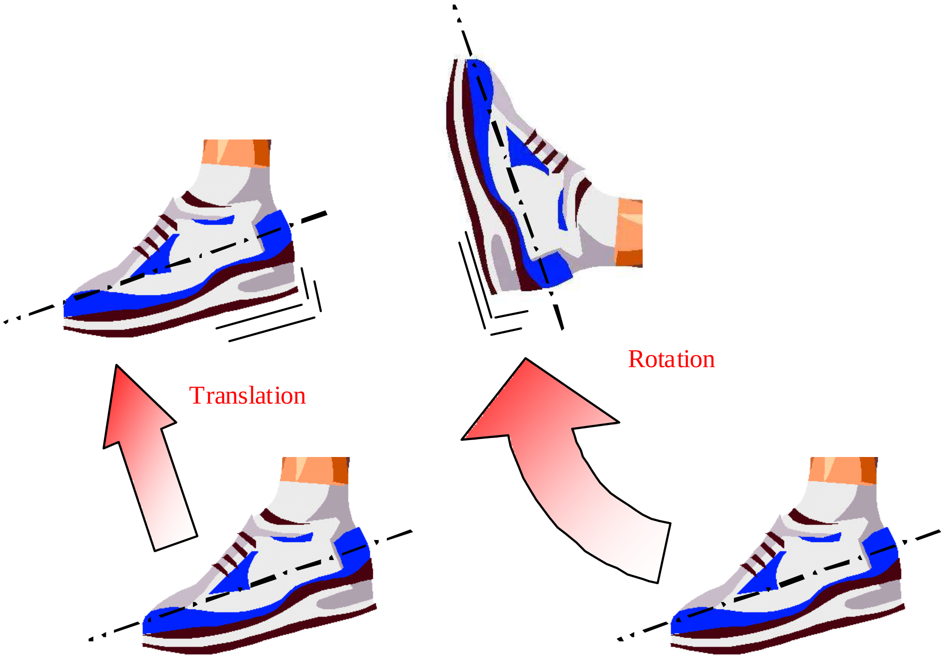


Abb. 2: *Translation und Rotation.*

4.3 Weg und Winkel

Der *Weg* ist definiert als der Abstand zwischen zwei Punkten. Gemessen wird der Weg in der Einheit Meter (*m*). Mit Wegen können Translationen (Verschiebungen) von Körpern gemessen werden.

Beispiel zur Wegmessung bei einer Translation:

Ein Beispiel aus der Praxis ist der „Reichweite-Test“ (Abb. 3). Der Weg *s* zwischen der Ausgangslage und der gebeugten Lage dient hierbei als Maß für die Koordinationsfähigkeit eines Menschen. Die horizontale Position der Fingerspitzen bei aufrechtem Stand ist die Referenzlage gegenüber der, die aktuelle Lage *s* der Fingerspitzen gemessen wird.

Abb. 3: *Reichweite-Test*

Der *Winkel* wird zwischen zwei Geraden gemessen.

Die Einheit ist:

Grad (engl.: *degree*): °

Bogenmaß, *Radiant* (engl.: *radian*): *rad* = 1

Ein voller Kreis besitzt einen Winkel von 360° und ein Bogenmaß von 2π rad = 2π. Daraus folgt die Umrechnung:

$2\pi\ rad = 360°$, $1\ rad \approx 60°$

4.4 Geschwindigkeit

In der Kinematik werden Bewegungen betrachtet. Die Lage der Körper verändert sich mit der Zeit. Die Lagekoordinaten (Wege, Winkel) sind Funktionen der Zeit *t*.

Die *Geschwindigkeit* kann man aus der Weg-Zeit-Funktion (vgl. Abb. 5) ableiten:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist Meter pro Sekunde, ${}^{m}/_{s}$. Aus dem alltäglichen Leben ist die Einheit Kilometer pro Stunde, ${}^{km}/_{h}$ geläufiger. Es gilt

$$1\frac{m}{s} = \frac{m \cdot 3600s \cdot km}{s \cdot 1000m \cdot h} = 3{,}6\ \frac{km}{h}.$$

Bei der *Translation* besitzen alle Punkte des Körpers zu jedem Zeitpunkt die gleiche Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung.

Bei der *Rotation* besitzen die Punkte des Körpers unterschiedliche Geschwindigkeiten nach Betrag und Richtung.

4.4.1 Momentanpol

Eine allgemeine Bewegung lässt sich immer aus einer reinen Translation und einer reinen Rotation zusammensetzen. Zu jedem Zeitpunkt muss es eine Achse geben, die gerade keine Geschwindigkeit hat. Dieser Achse, die aber nicht immer auf dem Körper liegt, wird *Momentandrehachse* (engl. *instant axis of rotation*) genannt. In 2D erhält man lediglich einen Punkt ohne Geschwindigkeit (vgl. Abb. 4), den sogenannten *Momentanpol* (engl. *instant centre of rotation*). Der Körper dreht sich also augenblicklich um die Momentandrehachse, in 2D um den Momentandrehpol.

Die Verbindungsgerade zwischen jedem Punkt *M* auf der der Momentandrehachse und einem Punkt *P* auf dem Körper liegt stets senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor v_P an diesem Punkt. Die Momentandrehachse liegt also auf der Ebene durch den Punkt *P* mit Lot v_P. Der Betrag $|v_P|$ wächst mit dem Abstand von *P* zur Momentandrehachse linear an.

Besteht die Bewegung aus einer reinen Rotation, so liegt die Momentandrehachse zeitlich konstant im Drehmittelpunkt. Besteht die Bewegung allerdings ausschließlich aus einer Translation, so liegt sie im Unendlichen.

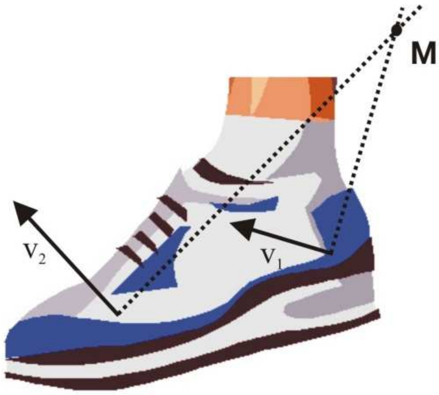


Abb. 4: Momentanpol M

Berechnung der Momentandrehachse in 3D:

Für zwei Punkte P_1 und P_2 mit Ortsvektoren $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ bestimmt man die jeweiligen Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ und die Ebenen durch die jeweiligen Punkte mit den Normalen $\vec{n}_1 = \vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|$ und $\vec{n}_2 = \vec{v}_2/\|\vec{v}_2\|$:

$$E_1: \ \vec{x} \cdot \vec{n}_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = d_1 ,$$
$$E_2: \ \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_1 = d_2 .$$

Die Werte d_1 und d_2 geben dabei den Abstand der Ebene zum Ursprung an. Die Momentandrehachse ist gegeben durch die Schnittgerade der beiden Ebenen, also durch die Punkte $\vec{x}$ mit

$$\begin{pmatrix} n_{1,x} & n_{1,y} & n_{1,z} \\ n_{2,x} & n_{2,y} & n_{2,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} .$$

1. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear unabhängig: Die Lösung ist genau eine Gerade.
2. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear abhängig und $d_1 \neq d_2$: Die Momentandrehachse liegt im Unendlichen.
3. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear abhängig und $d_1 = d_2$: Damit sind die Ebenen identisch. Die Punkte P_1 und P_2 sind in diesem Fall ungünstig gewählt.

Berechnung des Momentanpols in 2D:

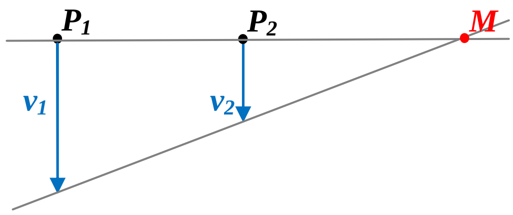
Analog bestimmt man die Geradengleichungen

$$G_1: \ \vec{x} \cdot \vec{n}_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = d_1 ,$$
$$G_2: \ \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_1 = d_2 .$$

Der Momentanpol ist gegeben durch den Schnitt der Geraden, also durch die Lösung von

$$\begin{pmatrix} n_{1,x} & n_{1,y} \\ n_{2,x} & n_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

1. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear unabhängig: Es existiert genau eine Lösung.
2. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear abhängig und $d_1 \neq d_2$: Der Momentanpol liegt im Unendlichen.
3. Fall: Die Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind linear abhängig und $d_1 = d_2$: Im Gegensatz zu 3D kann man den Momentanpol bestimmen durch den Schnittpunkt der Geraden $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{(P_1 + v_1)(P_2 + v_2)}$.



4.5 Beschleunigung

Die *Beschleunigung* kann man aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion (vgl. Abb. 5) ableiten:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}.$$

Die Einheit der Beschleunigung ist Meter pro Sekunde im Quadrat: $^m/_{s^2}$.

Beispiel: „Erdbeschleunigung“Die

Erdbeschleunigung ist in Deutschland gegeben durch

$$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \approx 35{,}3\,\frac{km}{h}/s.$$

Beim freien Fall ohne Luftwiderstand nimmt die Geschwindigkeit in jeder Sekunde also um 35,3 km/h zu.

Sonderfälle:

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit längs einer geraden Bahn bewegt (Translation), erfährt keine Beschleunigung (da gilt: $\Delta v = 0$).

Ein Körper jedoch, der sich mit konstanter Geschwindigkeit längs einer Kreisbahn bewegt, erfährt eine konstante Beschleunigung obwohl sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert. Allerdings wird die Richtung der Geschwindigkeit laufend geändert. Die Beschleunigung ist zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtet (Zentripetalbeschleunigung).

Zum Merken:

Eine Beschleunigung kann den Betrag einer Geschwindigkeit und / oder die Richtung einer Geschwindigkeit ändern.

4.6 Zusammenfassung

Man kann den zurückgelegten Weg zu mehreren Zeitpunkten messen und in einem so genannten Weg-Zeit-Diagramm (vgl. Abb. 5) auftragen. Die Steigung dieser Funktion ist ein Maß für die Änderung des Weges zu diesem Zeitpunkt. Es ist also die Geschwindigkeit.

Die Steigung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ist ein Maß für die Änderung der Geschwindigkeit, also die momentane Beschleunigung. Dies ist die zweite Ableitung der Weg-Zeit-Funktion, entspricht also der Krümmung dieser Funktion.

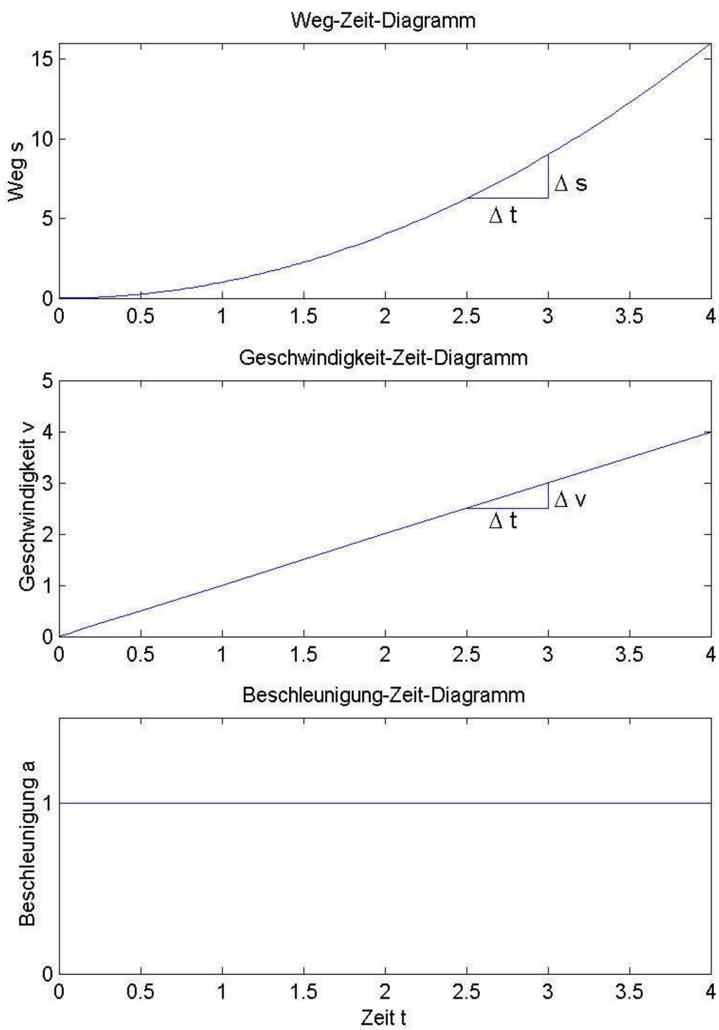


Abb. 5: Zusammengehörige Diagramme.

Analoges gilt für die Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung (siehe Tabelle).

Translation	**Weg:** Abstand zwischen zwei Punkten.	$s(t)$	m
	Geschwindigkeit: Die Änderung des Weges mit der Zeit.	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
	Beschleunigung: Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit (Betrag und / oder Richtung).	$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Rotation	**Winkel:** Neigung zwischen zwei Achsen.	$\varphi(t)$	°
	Winkelgeschwindigkeit: Die Änderung des Winkels mit der Zeit.	$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$	$\frac{°}{\text{s}}$
	Winkelbeschleunigung: Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit.	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$	$\frac{°}{\text{s}^2}$

4.7 Einheitenumrechnung, Winkeleinheiten

Beispiel: Erdbeschleunigung

Erweiterung mit „1“:

$$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \text{m}} \cdot \frac{3600\text{s}}{1\text{h}} \approx 36\ \frac{\text{km}}{\text{h s}}$$

Winkel

$$360° = 2\,\pi \cdot \text{rad} = 1\ \text{U}$$

Drehzahl

$$n = 3000\ \frac{\text{U}}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 50\ \frac{\text{U}}{s} = 50\ \text{Hz}$$

Die Einheit Hz ist nicht schön gewählt, aber sehr üblich.

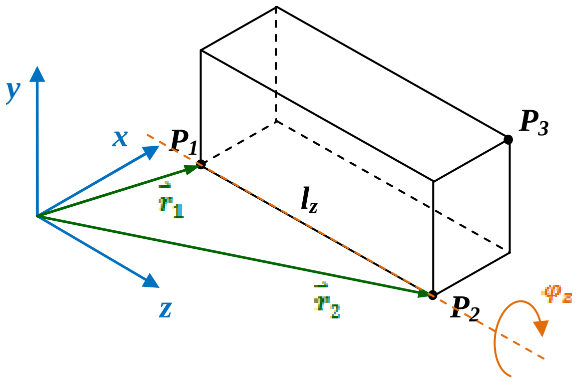
Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = 3000\ \frac{\text{U}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \cdot \text{rad}}{1\ \text{U}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{\text{s}} \approx 300\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 300\ s^{-1}$$

Die Einheit s^{-1} ist nicht schön gewählt, aber ebenso sehr üblich.

4.8 Bewegung des starren Körpers im Raum

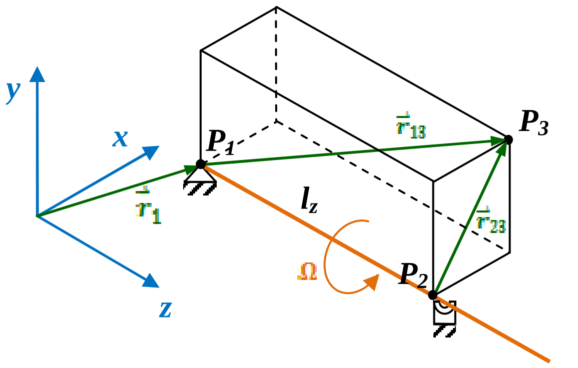
4.8.1 Erinnerung an Freiheitsgrade, Bindungen und Koordinaten



Die Anzahl f der Freiheitsgrade eines Systems ist gegeben durch $f = 6n - b$, wobei n die Anzahl der starren Körper und b die Anzahl der Bindungen angibt.

Hier liegt der Körper frei im Raum, wir haben also 6 Freiheitsgrade. Die Körperlage ist allerdings nicht eindeutig definiert durch die beiden Ortsvektoren $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ sowie $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$, da weiterhin eine Drehung um die $\overline{P_1P_2}$-Achse möglich ist. Die beiden Vektoren sind nicht unabhängig, da wir die Nebenbedingung $\| \overline{P_1P_2} \| = l_z$ haben. Durch $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2, \varphi_z$ haben wir dann 6 unabhängige Koordinaten gegeben.

4.8.2 Rotation um eine feste Achse



$\overline{P_1P_2}$ sei eine feste Achse. An Punkt P_1 liegen nun $b_1 = 3$ Bindungen, an P_2 $b_2 = 2$ Bindungen, der Drehwinkel ist der einzig verbliebene Freiheitsgrad.

$$\vec{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{13} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor r_3 von P_3 ist gegeben durch $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{13}$. Folglich ist die Geschwindigkeit von P_3 ist gegeben durch $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{13} = \vec{v}_1 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{13}$, wobei $v_1 = 0$ die Geschwindigkeit des Punktes P_1 angibt.

4.8.3 Allgemeine Bewegungen ohne feste Achse

Betrachtet man den vorherigen Fall, aber ohne Lager an P_1, also eine variable Drehachse und damit eine zeitabhängigen Geschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$, so ergibt sich allgemein

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{13},$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{13},$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{13} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}_{13} = \vec{a}_1 + \dot{\Omega}\vec{e}_\Omega \times \vec{r}_{13} + \Omega\dot{\vec{e}}_\Omega \times \vec{r}_{13} + \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{13}).$$

wobei e_Ω den Richtungsvektor der Drehachse angibt.

5 Kinetik / Dynamik

In der Kinetik (oder Dynamik) wird die Wechselwirkung zwischen der Bewegung eines Körpers und den Kräften, die auf ihn wirken untersucht.

Es werden nun auch Kräfte und Momente betrachtet, die dadurch entstehen, dass ein Körper seine Lage und seinen Bewegungszustand ändert. Dies sind neben *Dämpfungs-* und *Reibungskräften* vor allem die *Trägheitskräfte*.

5.1 Newtonsche Gesetze

Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsprinzip):

Ein Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsprinzip):

Die Beschleunigung a, die ein Körper erfährt, wenn eine Kraft F darauf einwirkt, ist direkt proportional zur Masse m des Körpers und erfolgt in Richtung der einwirkenden Kraft:

$$\textit{Kraft} = \textit{Masse} \cdot \textit{Beschleunigung}$$

Das zweite Newtonsche Gesetz oder Axiom kann auch als Definition der Kraft angesehen werden.

Drittes Newtonsches Gesetz (Wechselwirkung):

$$\textit{actio} = \textit{reactio}$$

5.2 Das d'Alembertsches Prinzip

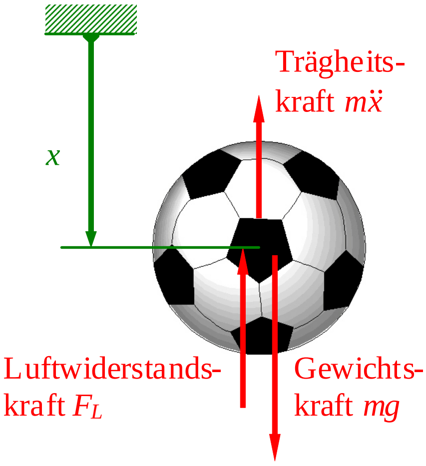
In der Statik wurde an einem Freikörperbild das statische Gleichgewicht der Kräfte betrachtet. An seine Stelle tritt nun das *dynamische Gleichgewicht*. Nach D'ALEMBERT werden die Trägheitskräfte und Trägheitsmomente genau wie die sonstigen Kräfte und Momente behandelt. Dann gilt so wie in der Statik, dass die Summe aller an einem Körper angreifenden Kräfte und Momente im Gleichgewicht sein muss, also Null ergeben muss.

Beispiel: „Fallender Fußball“

Auf einen Fußball im freien Fall wirken die Gewichtskraft, die Trägheitskraft und eine Luftwiderstandskraft.

$$\sum F_{i,x} = 0,$$
$$mg - F_L - m\ddot{x} = 0,$$
$$\Longrightarrow\ \ddot{x} = g - F_L/m.$$

Aus dem Gleichgewicht aller Kräfte in vertikaler Richtung folgt die Beschleunigung $a = \ddot{x}$ des Fußballs, die stets kleiner ist als die Erdbeschleunigung g.



5.3 Das Lösungsrezept für Dynamische Gleichgewichte

Schritt 1: Modellbildung.
Generieren eines Ersatzmodells (Skizze mit Geometrie, Lasten, Einspannungen). Weglassen unwichtiger Dinge. Das “reale System” muss abstrahiert werden.

Schritt 2: Kinematik.
Koordinaten (Wege, Winkel) einführen. Ausgelenktes System hinzeichnen und Auslenkungen gegenüber Referenzlage beschreiben.

Schritt 3: Schneiden, Freikörperbild.
System aufschneiden, Schnittkräfte/-momente, Trägheits-, Dämpfungs- und Federkräfte/-momente gegen Koordinatenrichtung eintragen.

Schritt 4: Gleichgewicht.
Kräfte-/Momentengleichgewichte für Freikörper anschreiben und daraus Bewegungsdifferentialgleichung(en) bestimmen.

Schritt 5: Gleichungen lösen.

Schritt 6: Auswerten:
Ergebnisse prüfen, deuten, darstellen.
Verifizieren: Mathematisch korrekt? Plausibilität, Konvergenz, … prüfen.
Validieren: Annahmen gültig? Mit Experimenten vergleichen.

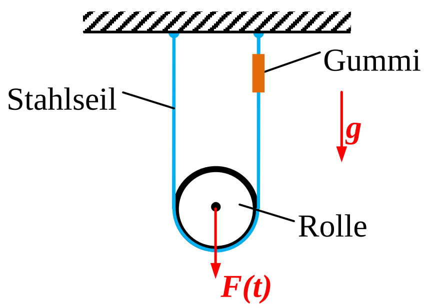
Beispiel zum Lösungskonzept: „Seilrolle“

Gegeben:

- Stahlseil mit Gummieinsatz
- Rolle, auf die eine Kraft $F(t)$ wirkt

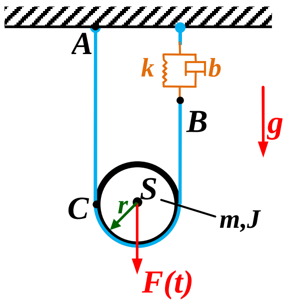
Gesucht:

- Schwingung im Eingeschwungenen Zustand



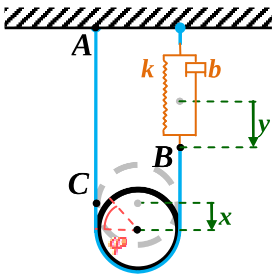
Schritt 1: Modellbilldung

Rolle: Radius *r*, Masse *m*, Massenmoment *J* um Schwerpunkt *S*
Feder: Federsteifigkeit *k*
Dämpfer: Dämpfungsparameter *b*
Erregerkraft: $F(t) = \hat{F}\, cos(\Omega t)$
Haften zwischen Seil und Rolle

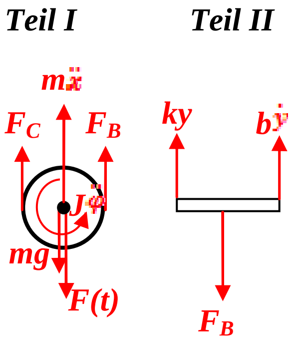


Schritt 2: Koordinaten / Kinematik

Anzahl Freiheitsgrade $f =$
Koordinaten:
$x =$
$y =$
$\varphi =$



Schritt 3: Schneiden, FKB



Schritt 4: Kräftegleichgewicht

5.4 Energie, Arbeit, Leistung

5.4.1 Energie

Die *Einheit* der Energie ist ein Joule: $\mathrm{J = N \cdot m}$.

Neben der mechanischen Energie gibt es z.B. chemische Energie, Strahlungsenergie, Wärmeenergie. Die mechanische Energie kann man in *kinetische* und *potentielle* Energie unterteilen:

Kinetische Energie: Bewegt sich ein Körper mit der Masse m mit der Geschwindigkeit v, so berechnet sich seine kinetische Energie E_{kin} zu:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Potentielle Energie: tritt als *Lageenergie* oder als *Verformungsenergie* auf. Die Lageenergie eines Körpers mit der Masse m, der sich auf dem Niveau h über einem Referenzniveau $h_0 = 0$ befindet lautet:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Wird z.B. eine linear-elastische Feder (Steifigkeit k) mit der Kraft F um die Strecke x verformt, dann beträgt die in ihr gespeicherte Verformungsenergie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Energieerhaltung, Energieumwandlung, Schwingungen:

Energie kann nicht verloren gehen (erster Hauptsatz der Thermodynamik). Allerdings kann Energie wegtransportiert werden (Strahlung) oder in eine Form umgewandelt werden die man als unbrauchbar empfindet. Bei einer Schwingung (z.B. Pendel) werden die Energieformen kinetische und potentielle Energie laufend ineinander umgewandelt. Diese Umwandlung gelingt jedoch nie vollständig. Ein Teil der Energie wird immer auch in Wärmeenergie umgewandelt (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) und geht als mechanische Energie verloren. Alle Schwingungen sind gedämpft und kommen ohne äußere Energiezufuhr irgendwann zur Ruhe.

Zum Merken:

Energie bleibt erhalten

5.4.2 Arbeit

Die Arbeit W ist eine Differenz von Energien. Kräfte können mechanische Arbeit verrichten, wenn sich der Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraft verschiebt. Bei konstanter Kraft gilt dann:

Zum Merken:

Arbeit = Kraft mal Weg

Beispiele:

- Hubarbeit: Wird ein Körper mit der Gewichtskraft F_G um die Höhe h angehoben, so berechnet sich die Hubarbeit W_{Hub} mit:

$$W_{Hub} = F_G \cdot h$$

- Reibarbeit: Bewegt sich ein Körper entlang einer Strecke s und wirkt dabei die Reibkraft F_R, so berechnet sich die Reibarbeit $W_{\mathrm{Re}ib}$ mit:

$$W_{\mathrm{Re}ib} = -F_R \cdot s$$

Bei der Hubarbeit leistet die Kraft Arbeit an dem Körper. Die im Körper gespeicherte Energie nimmt zu. Kraft und Weg besitzen die gleiche Orientierung (nach oben). Die Arbeit ist positiv.

Bei der Reibarbeit dagegen ist die Reibkraft stets so orientiert, dass sie der Bewegung entgegen wirkt. Kraft und Weg besitzen unterschiedliche Vorzeichen. Die Arbeit ist negativ. Dem Körper wird durch die Reibung Energie entzogen.

5.4.3 Leistung

Die Leistung P ist ein Maß dafür, wie viel Arbeit W pro Zeitspanne geleistet wird:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Die **Einheit** der Leistung ist das Watt: $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Zum Merken:
Leistung = Arbeit pro Zeit

5.5 Lagrange'sche Gleichungen 2. Art

Es gibt eine Alternative zum Freischneiden um Bewegungsgleichungen aufstellen zu können. Diese folgen aus den Energieprinzipen. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\, E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = Q_i,$$

wobei q_i *generalisierten Koordinaten* bezeichnen, d.h. einen Minimalsatz an unabhängigen Koordinaten, und Q_i eingeprägte äußere Kräfte in Richtung q_i. Weiterhin bezeichnet E_{kin} die kinetische sowie E_{pot} die potentielle Energie.

Beispiel: Feder-Masse-System (ohne Dämpfung)

Im einfachen Fall einer Federschwingung mit einem Freiheitsgrad ist q gegeben durch die Auslenkung x. Die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ist also eine Funktion in x und die Potentielle Energie $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$ eine Funktion in *x*. Ohne externe Kraft gilt $Q = 0$. Es folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{kin}}{\dot{x}} = \frac{d}{dt}\, m\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial\, E_{kin}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = kx.$$

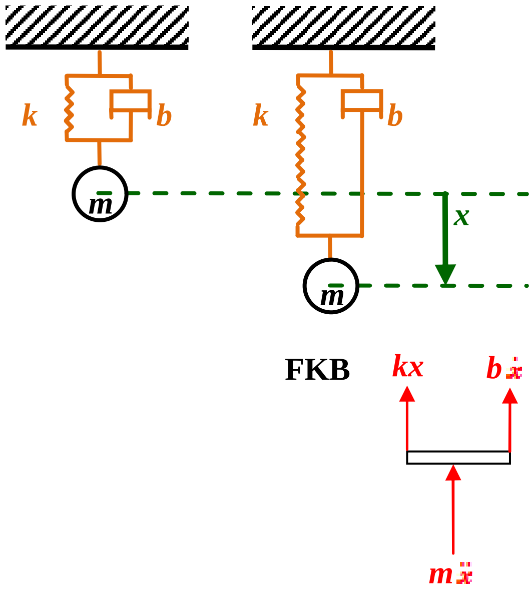
Zusammen ergibt sich $m\ddot{x} + kx = 0$ die bekannte Federgleichung.

6 Schwingungen von einem Freiheitsgrad

Schwinger von einem Freiheitsgrad werden durch eine einzige skalare Bewegungsgleichung (Differentialgleichung) beschrieben. Im einfachsten Fall ist diese DGL 2. Ordnung linear und mit konstanten Koeffizienten, wie z.B.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

6.1 Freie Schwingungen



Gegeben: Ein-Massen-Schwinger mit linearer Feder (Steifigkeit k) und linearem Dämpfer (Dämpfungskonstante b). Bei $x = 0$ sei die Feder entspannt und das System in der statischen Ruhelage.

Gesucht: Bewegung $x(t)$.

Lösung nach Lösungsrezept:

Schritt 1: „Modellbildung“ … schon erledigt

Schritt 2: „Kinematik“ … schon erledigt

Schritt 3: „Freikörperbild“ … siehe Bild

Schritt 4: „Gleichgewicht“

$$\textstyle\sum_i F_{x,i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für x, oder

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 \coloneqq \sqrt{k/m}$ des ungedämpften Systems und dem dimensionslosen Lehrschen Dämpfungsmaß $D \coloneqq \frac{b}{2m\omega_0}$.

Schritt 5: „Lösen“ mit Hilfe des $e^{\lambda t}$-Ansatzes:

$$x(t) = \hat{x}e^{\lambda t},$$

$$\dot{x}(t) = \lambda\hat{x}\, e^{\lambda t},$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2\hat{x}\, e^{\lambda t}.$$

Einsetzen in DGL liefert $(\lambda^2 + 2D\omega_0\lambda + \omega_0^2)\hat{x}e^{\lambda t} = 0$ und damit die triviale Lösung $\hat{x} = 0$ sowie nicht-triviale Lösungen über die charakteristische Gleichung, die Frequenzgleichung $(\lambda^2 + 2D\omega_0\lambda + \omega_0^2) = 0$. Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{-1 + D^2}.$$

Für übliche technische elastische Systeme gilt $D = 0{,}001 \dots 0{,}01$. Mit der Definition des Abklingkoeffizienten $\delta := -D\omega_0$ und der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega := \omega_0\sqrt{1-D^2}$ erhalten wir (mit $j := \sqrt{-1}$) die zueinander konjugiert komplexen Werte

$$\lambda_1 = -\delta + j\omega, \quad \lambda_2 = -\delta - j\omega.$$

Die Allgemeine Lösung lautet damit

$$x(t) = \hat{x}_1 e^{\lambda_1 t} + \hat{x}_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left[\hat{x}_1 e^{j\omega t} + \hat{x}_2 e^{-j\omega t}\right].$$

Unter Benutzung von $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ erhält man die reelle

$$x(t) = e^{-\delta t}[(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)\cos\omega t + (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) j \sin\omega t].$$

Es existieren also zwei freie Konstanten $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ zum Anpassen an die Anfangsbedingungen. Oder in anderen Schreibweisen die Konstanten $\hat{a}_c$ und $\hat{a}_s$ mit

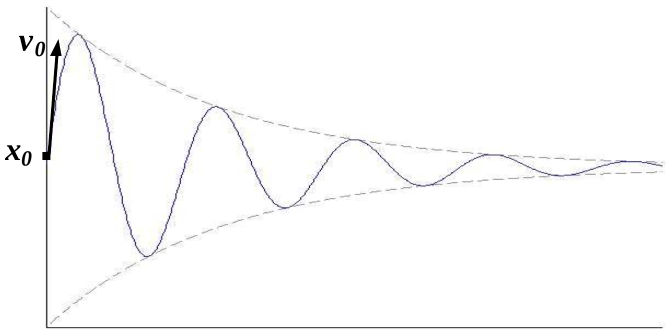
$$x(t) = e^{-\delta t}[\hat{a}_c \cos\omega t + \hat{a}_s \sin\omega t]$$

beziehungsweise $\hat{a}$ und φ_0 mit

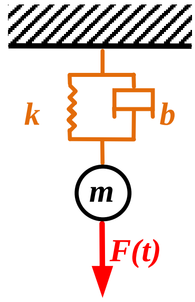
$$x(t) = \hat{a} e^{-\delta t}\cos(\omega t - \varphi_0).$$

In der Regel sind die folgenden Anfangsbedingungen gegeben, die Anfangslage $x(0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$. Damit erhalten wir die Lösung

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega}\sin\omega t\right].$$



6.2 Erzwungene Schwingungen



Gegeben: Ein-Massen-Schwinger wie im vorherigen Abschnitt, aber nun mit harmonischer Erregung $F(t) = \hat{F}\cos\Omega\mathrm{t}$.

Gesucht: Bewegung $x(t)$.

Lösung: *Schritt 1 bis 4* unseres Lösungsrezepts führen auf die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \hat{F}\cos\Omega\mathrm{t}$$

mit inhomogener rechter Seite.

Schritt 5: „Allgemeine Lösung“

Wir teilen die Lösung x(t) auf in zwei Teile, die allgemeine Lösung $x_{homo}(t)$ der zugeordneten homogenen Differentialgleichung (Eigenschwingungen) und die partikulare Lösung $x_{part}(t)$, also irgendeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung,

$$x(t) = x_{homo}(t) + x_{part}(t).$$

Die Gesamtlösung $x(t)$ muss nun noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

Lösung im eingeschwungenen Zustand

Meist interessiert man sich nur für die Bewegung im „eingeschwungenen Zustand“. Die Dämpfung lässt Eigenschwingungen irgendwann verschwinden, also $x_{homo}(t) = 0$ und $x(t) = x_{part}(t)$. Wir betrachten die komplexe DGL

$$\ddot{z} + 2D\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\hat{F}\omega_0^2}{k}e^{j\Omega t}$$

mit $z \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(z) \coloneqq x$. Weiterhin gilt $\mathrm{Re}\left(e^{j\Omega t}\right) = \cos\Omega t$.

<u>Lösungsansatz</u> vom Typ der rechten Seite (Gleichtaktansatz):

$$z(t) = \hat{\mathrm{z}}e^{j\Omega t},$$

$$z(t) = \mathrm{j}\Omega\hat{\mathrm{z}}e^{j\Omega t},$$

$$z(t) = -\Omega^2\hat{\mathrm{z}}e^{j\Omega t}.$$

Einsetzen in dir Differentialgleichung liefert

$$-\Omega^2\hat{z}e^{j\Omega t} + 2D_0\omega_0 j\hat{z}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\hat{z}e^{j\Omega t} = \frac{\hat{F}\omega_0^2}{k}e^{j\Omega t}$$

und daher

$$\hat{z} = \frac{\hat{F}}{k}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2D\omega_0 j\Omega}$$

beziehungsweise mit der Erregerkreisfrequenz $\eta = \Omega/\omega_0$

$$\hat{z} = \frac{\hat{F}}{k}\frac{1}{1-\eta^2+j2D\eta}.$$

Wir erweitern mit dem konjugiert komplexen des Nenners und erhalten damit die komplexe Lösung

$$z(t) = \frac{\hat{F}}{k}\frac{1-\eta^2-j2D\eta}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}e^{j\Omega t}.$$

Um nun den reellen Anteil $x(t)$ zu erhalten schreiben wir den komplexen Zähler als

$$|1-\eta^2-j2D\eta|\,e^{-j\varphi} = \sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}\,e^{-j\varphi}$$

und erhalten

$$z(t) = \frac{\hat{F}}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}e^{-j\varphi}e^{j\Omega t}$$

mit der konstanten Phasenverschiebung $\tan\varphi = \frac{-Im(\hat{z})}{Re(\hat{z})} = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$. In dieser Form lässt sich die der reelle Anteil direkt angeben durch

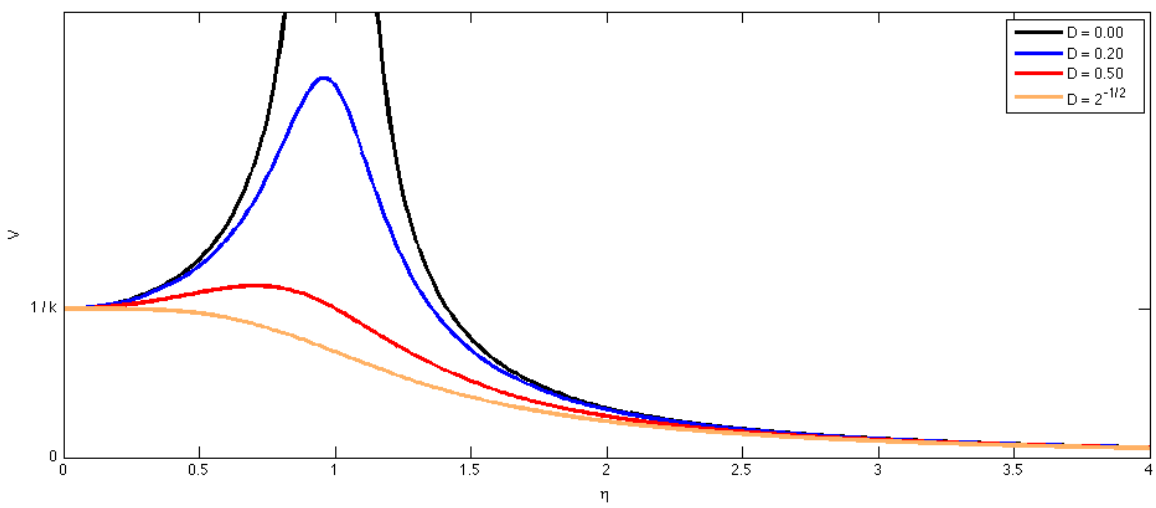
$$x(t) = \mathrm{Re}\big(z(t)\big) = \frac{\hat{F}}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}\cos(\Omega t-\varphi) = \hat{x}\cos(\Omega t-\varphi).$$

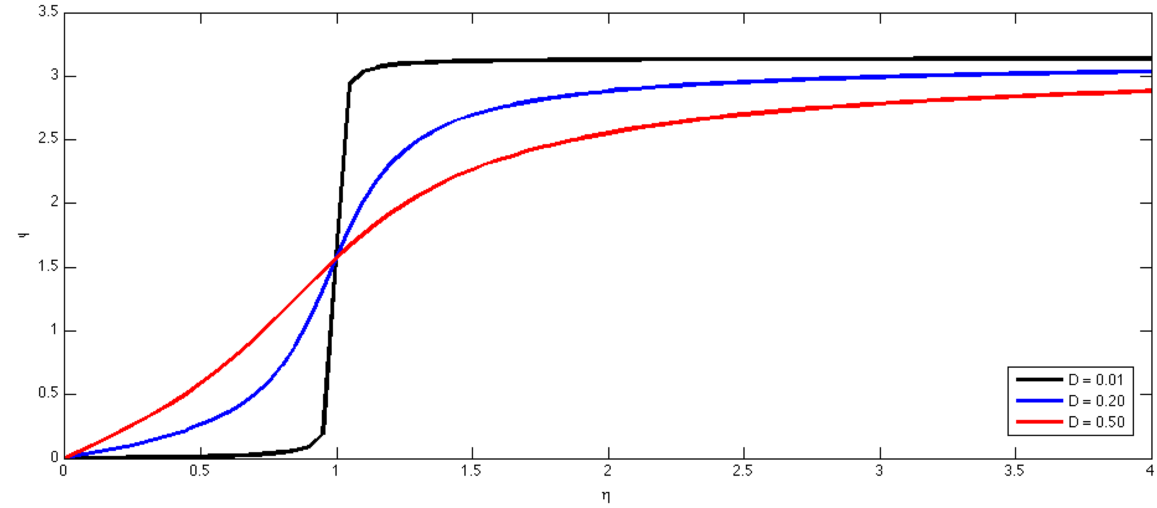
Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$

$$V(\eta) := \frac{Schwingungsamplitude(\eta)}{Erregeramplitude}$$

$$= \frac{\hat{x}(\eta)}{\hat{F}} = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}$$

Somit kann die Amplitude $\hat{x} = V(\eta)\hat{F}$ für $\eta \approx 1$, also Eigenfrequenz≈ Erregerfrequenz, und kleine Werte von D sehr groß werden. Man stellt außerdem fest, dass die Lösung $x(t) = \hat{x}\cos(\Omega\mathrm{t}-\varphi)$ der Erregung $F(t) = \hat{F}\cos\Omega\mathrm{t}$ „nacheilt" aufgrund der Phasenverschiebung $\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$.





6.3 Linearisieren von Differentialgleichungen

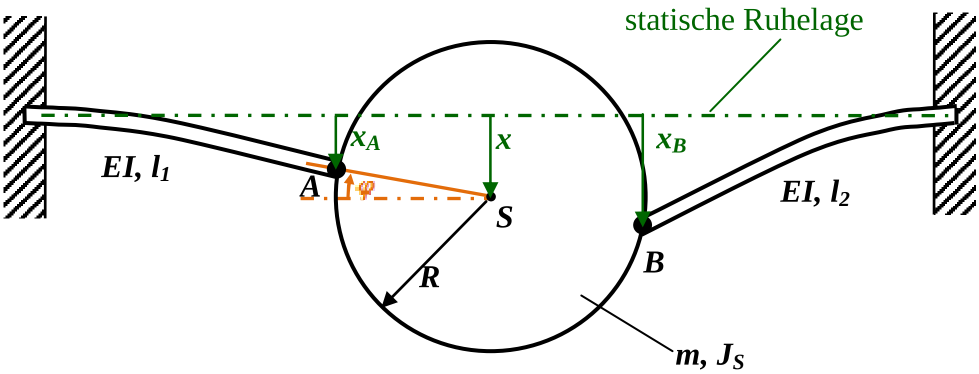
Siehe Übung…

6.4 Umwandeln von Differentialgleichungen in Systeme 1. Ordnung

Siehe Übung…

7 Schwingungen von mehreren Freiheitsgraden

7.1 Freie Schwingungen (Eigenvektoren)



Gegeben:

Eine Scheibe (Radius R, Masse m, Massenmoment J_S um Schwerpunkt S), aufgehängt an Drehgelenken A und B mit Masselosen Balken (Biegesteifigkeit EI, Länen ℓ_1 und ℓ_2). Betrachtet werden nur kleine Absenkungen aus der statischen Ruhelage ($x_A, x_B \ll R, \ell_1, \ell_2$).

Gesucht:

a) Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. *Antwort*: 2

b) Ein Differentialgleichungssystem für, das die Bewegung des Systems beschreibt.

c) Die Bewegung des Systems.

b) DGL-System aufstellen mit Lagrange 2

Lagrange'sche Gleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\, E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \{1,2\}.$$

Geeralisierte Koordinaten: $q_1 = x;\ q_2 = \varphi$.

Energien:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2,$$
$$E_{pot} = \frac{1}{2}k_1 x_A^2 + \frac{1}{2}k_2 x_B^2.$$

Ersatzfedersteifigkeiten der Kragbalken:

$$k_i = \frac{3EI_i}{\ell_i^3}.$$

Kinematik: x_a und x_B als Funktionen von generalisierten Koordinaten x und φ bilden:

$$x_A = x - R\sin\varphi \doteq x - R\varphi,$$

$$x_B = x - R\sin\varphi \doteq x + R\varphi,$$

da die Achsenlängen sehr klein sind.

<u>$i = 1$:</u> $q_1 = x;\ \dot{q}_1 = \dot{x}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[m\dot{x}^2 + J_S\dot{\varphi^2}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[m\dot{x}^2 + J_S\dot{\varphi^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1(x - R\varphi)^2 + k_2(x + R\varphi)^2\right] = 0,$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_2 - k_1)R\varphi = 0.$$

<u>$i = 2$:</u> $q_1 = \varphi;\ \dot{q}_1 = \dot{\varphi}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left[m\dot{x}^2 + J_S\dot{\varphi^2}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[m\dot{x}^2 + J_S\dot{\varphi^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[k_1(x - R\varphi)^2 + k_2(x + R\varphi)^2\right] = 0,$$

$$J_S\ddot{\varphi} + (k_1 + k_2)R^2\varphi + (k_2 - k_1)Rx = 0.$$

In Matrixschreibweise ergibt dies

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)R \\ (k_2 - k_1)R & (k_1 + k_2)R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

wobei q(t) den Vektor der generalisierten Koordinaten, M die Massematrix und K die Steifigkeitsmatrix bezeichnet.

c) Bewegung des Systems (freie Schwingung)

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $l_1 = l_2 = l$ und daher $k_1 = k_2 = k$. Es folgt

$$K = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2kR^2 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen wieder einen $e^{\lambda t}$ −Ansatz:

$$q(t) = \hat{q}e^{\lambda t},\ \ \ddot{q}(t) = \lambda^2\hat{q}e^{\lambda t}.$$

Einsetzen in DGL liefert

$$[M\lambda^2 + K]\hat{q} = 0.$$

Eigenwerte: Im Folgenden bezeichnen wir $A(\lambda) \coloneqq [M\lambda^2 + K]$. Außer der trivialen Lösung $\hat{q} = 0$, also der Ruhelage des Systems, existieren weitere nicht-triviale Lösungen für $\hat{q}$ falls $\det\big(A(\lambda)\big) = 0$. In diesem Fall fordern wir also

$$\det\begin{bmatrix} m\lambda^2 + 2k & 0 \\ 0 & J_S\lambda^2 + 2kR^2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$(m\lambda^2 + 2k)\cdot(J_S\lambda^2 + 2kR^2) - 0 = 0,$$

und wir erhalten

$$\lambda_I^2 = -\frac{2k}{m}, \quad \lambda_{II}^2 = -\frac{2kR^2}{J_S}$$

beziehungsweise die vier Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm jR\sqrt{\frac{2k}{J_S}}.$$

Eigenfrequenzen: Daraus ergeben sich zwei Eigenfrequenzen

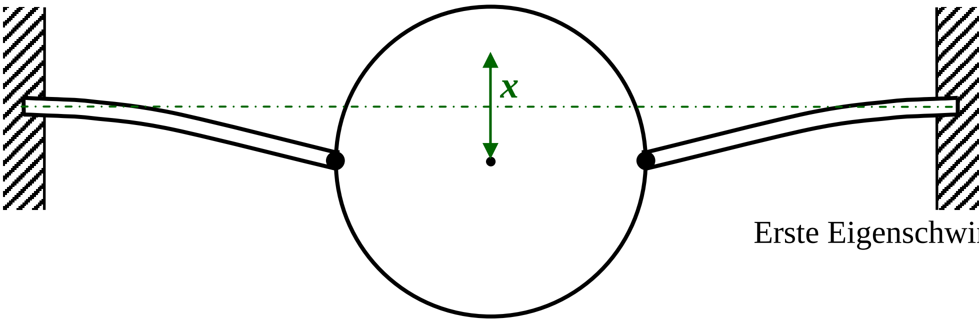
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = R\sqrt{\frac{2k}{J_S}},$$

Eigenfrequenzen mit anderem Vorzeichen liefern keine neuen Resultate.

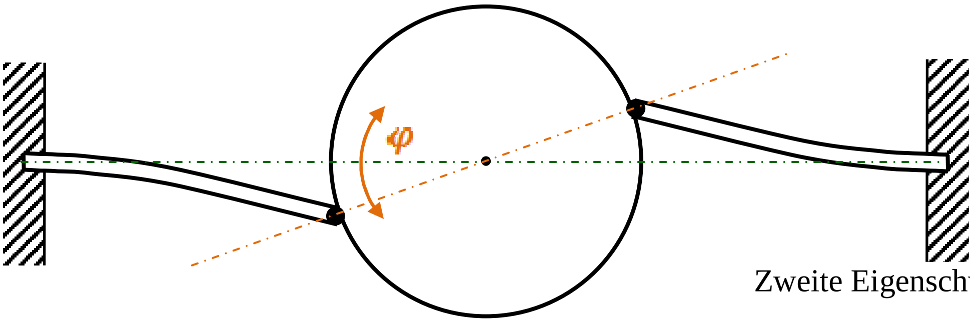
Eigenvektoren: Wir setzten jeweils λ_I^2 und λ_{II}^2 in die Gleichung $[M\lambda^2 + K]\hat{q} = 0$ und erhalten und Lösen nach $\hat{q}_I$ bzw. $\hat{q}_{II}$ auf.

λ_I^2 : $\quad 0 \cdot \hat{q}_{I,1} + (J_S\lambda_I^2 + 2kR^2) \cdot \hat{q}_{I,2} = 0. \quad \Rightarrow \hat{q}_I = \binom{1}{0}.$

λ_{II}^2: $\quad (m\lambda_{II}^2 + 2k) \cdot \hat{q}_{II,1} + 0 \cdot \hat{q}_{II,2} = 0. \quad \Rightarrow \hat{q}_{II} = \binom{0}{1}.$



Erste Eigenschwingung



Zweite Eigenschwingung

Allgemeine Lösung: Die Allgemeiner Lösung ergibt sich als Linearkombination der Eigenschwingungen, also

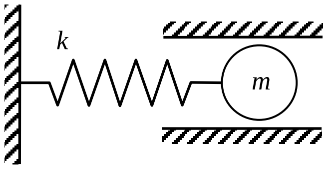
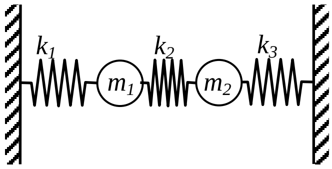
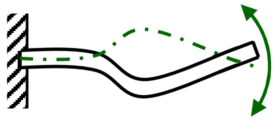
$$q(t) = c_I\hat{q}_I\cos(\omega_I t - \varphi_I) + c_{II}\hat{q}_{II}\cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$

mit vier Konstanten $(c_I, c_{II}, \varphi_I, \varphi_{II})$ zum Anpassen an die Anfangswertbedingungen $(x_0, \varphi_0, \dot{x}_0, \dot{\varphi}_0)$.

7.2 Deterministisches Chaos

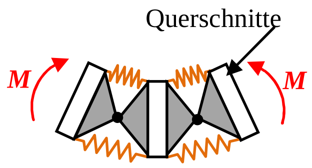
(s. Folien und Übung)

8 Kontinuumsschwingungen

Schwinger	… von einem FG	… von mehreren FG	Kontinua
Freiheitsgrade	1	n	∞
Beispiel			
DGL Typ	Gewöhnliche Differentialgleichung	System von Gewöhnlichen Differentialgleichungen	Partielle Differentialgleichung

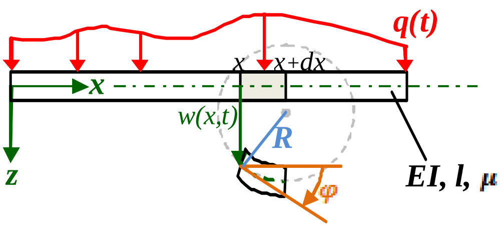
8.1 Herleitung der Feldgleichung

Annahmen:



- Querschnitte bleiben eben
- Querschnitte kippen gegeneinander
- Scherung, d.h. die Verschiebung gegeneinander, wird vernachlässigt
- Keine Längskraft, d.h. Kraft in Richtung der Balkenlänge (x-Richtung), also auch keine Seitenschwingung
- Einfacher linear-elastischer isotroper Werkstoff
- Linearisierung: Neigung klein $\varphi \ll 1$, Krümmung klein $\chi \ll 1$

Referenzlage (entspannt):



Gegeben: Kragbalken mit

- Länge ℓ,
- Biegesteifigkeit EI als Produkt aus Elastizitätsmodul E und Flächenträgheitsmoment I des Querschnitts,
- Streckendichte μ, sodass $\int_0^\ell \mu(x)dx = m$ die Masse ergibt,
- Streckenlast $q(x,t)$.

8.1.1 Kinematik

Die Auslenkung zur Zeit t und an der Stelle x wird angegeben durch $w(x,t)$. Die Neigung $\varphi(x)$, also der Winkel zwischen Referenzlage und Tangentialebene der ausgelenkten Lage kann angegeben werden durch

$$\varphi(x) = \lim_{dx\to 0} \arctan\left(\frac{w(x+dx)-w(x)}{dx}\right) \approx w'(x).$$

Weiterhin bestimmen wir die Krümmung $\chi(x)$ über den Radius R des Kreises, der am Punkt x dieselbe Tangentialebene wie die ausgelenkte Lage besitzt und der den Verlauf der Biegung um x bestmöglich approximiert. Die Krümmung wird dann angegeben als

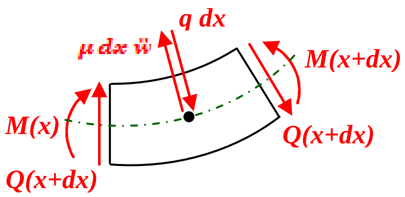
$$\chi(x) = \frac{1}{R(x)} \approx w''(x).$$

8.1.2 Werkstoff

Es gilt das Hooksche Gesetz $\sigma = E\varepsilon$. Die Krümmung ist proportional zum Biegemoment,

$$M = -EI\chi$$

8.1.3 Gleichgewicht



Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

Es existiert keine Normalkraft N orthogonal zu q, da die Längskraft nach Annahme verschwindet.

Kräftegleichgewicht in z-Richtung:

$$\sum F_z = 0,$$
$$Q(x+dx) - Q(x) + qdx - \mu dx\ddot{w} = 0,$$
$$\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = -q + \mu\ddot{w}.$$

Wir berechnen auf beiden Seiten den Grenzwert für $dx \to 0$ und erhalten

$$Q'(x) = -q + \mu\ddot{w}.$$

Momentengleichgewicht um C:

$$\overset{\curvearrowleft +}{\sum} M^C = 0,$$

$$M(x+dx) - M - Q(x+dx)\frac{dx}{2} - Q(x)\frac{dx}{2} = 0.$$

Wir teilen erneut durch dx und berechnen den Grenzwert für $dx \to 0$ und erhalten

$$M' = Q.$$

Zusammenstellen der Differentialgleichung (Feldgleichung):

Aus dem Momenten- und Kräftegleichgeweicht erhalten wir

$$M'' = Q' = -q + \mu\ddot{w}.$$

Aus der Kinematik und den Werkstoffeigenschaften erhalten wir

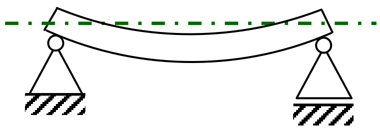
$$M'' = (-EI\chi)'' = (-EIw'')''.$$

Für (orts-)konstantes EI erhalten wir die Partielle Differentialgleichung für die Balkenbiegeschwingung

$$EIw'''' + \mu\ddot{w} = q.$$

8.2 Beispiel: Freie Balkenbiege-Schwingung

Gegeben sei ein Balken in der folgenden Form



mit Auslenkung $w(x,t)$ und den Randbedingungen

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w(\ell,t) &= 0 \end{aligned}\right\} & \qquad\qquad \text{keine Auslenkung am Rand,} \\ \left.\begin{aligned} M(0,t) &= 0 \\ M(\ell,t) &= 0 \end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned} w''(0,t) &= 0 \\ w''(\ell,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ keine Krümmung am Rand.} \end{cases}$$

Die Feldgleichung ist gegeben durch $EIw'''' + \mu\ddot{w} = 0$.

Gesucht ist die analytische Lösung für $w(x,t)$, passend zu obigen Randbedingungen.

Separationsansatz:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= W(x) \cdot T(t), \\ \ddot{w}(x,t) &= W(x) \cdot \ddot{T}(t), \\ w''''(x,t) &= W''''(x) \cdot T(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Feldgleichung erhalten wir also $EI\,W''''T + \mu W\ddot{T} = 0$ und durch umformen folgt

$$\frac{EI}{\mu}\frac{W''''(x)}{W(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = const := \ \omega^2$$

da die Gleichung jeweils für alle x und alle t erfüllt sein muss. Daraus erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \omega^2 T &= 0, \\ W'''' - \frac{\mu\omega^2}{EI} &= 0. \end{aligned}$$

Im Folgenden schreiben wir $k^4 := \frac{\mu\omega^2}{EI}$.

Allgemeine Lösung für T:

$$T(t) = \hat{T}\cos(\omega t - \alpha).$$

Allgemeine Lösung für W mittels $e^{\kappa x}$-Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} W &= \widehat{W}e^{\kappa x} \\ W'''' &= \kappa^4 \widehat{W}e^{\kappa x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\kappa^4 - k^4)\widehat{W}e^{\kappa x} = 0.$$

Neben der trivialen Lösung $\widehat{W} = 0$ existieren also vier weitere nicht-triviale Lösungen $\kappa_1 = k,\ \kappa_2 = -k,\ \kappa_3 = jk,\ \kappa_4 = -jk$ mit der imaginären Einheit j. Daraus ergibt sich

$$W = \sum_{i=1}^{4} \widehat{W}_i e^{\kappa_i x}$$

oder in reeller Schreibweise

$$W(x) = \hat{c}_1\cos(kx) + \hat{c}_2\sin(kx) + \hat{c}_3\cosh(kx) + \hat{c}_4\sinh(kx).$$

Anpassen an Randbedingungen:

$$W(0) = \mathrm{W}(\ell) = \mathrm{W}''(0) = \mathrm{W}''(\ell) = 0.$$

Einsetzen in die reelle Form von $W(x)$ liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos k\ell & \sin k\ell & \cosh k\ell & \sinh k\ell \\ -k^2 & 0 & k^2 & 0 \\ -k^2\cos k\ell & -k^2\sin k\ell & k^2\cosh k\ell & k^2\sinh k\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ \hat{c}_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir erhalten nicht-triviale Lösungen, wenn die obige Matrix singulär ist, d.h. falls die Determinante verschwindet. Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir nach der ersten Zeile. Die Determinante ist dann gegeben durch

$$\det\begin{pmatrix} \sin k\ell & \cosh k\ell & \sinh k\ell \\ 0 & k^2 & 0 \\ -k^2\sin k\ell & k^2\cosh k\ell & k^2\sinh k\ell \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cos k\ell & \sin k\ell & \sinh k\ell \\ -k^2 & 0 & 0 \\ -k^2\cos k\ell & -k^2\sin k\ell & k^2\sinh k\ell \end{pmatrix} = 0.$$

Erneutes Entwickeln jeweils nach der zweiten Zeile führt zur sogenannten Frequenzgleichung

$$4k^4 \sin k\ell\ \sinh k\ell = 0 \Rightarrow \sin k\ell = 0.$$

Für $k_0 = 0$ erhalten wir erneut die triviale Lösung. Weitere Lösungen existieren für

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{N}.$$

Die Werte $k_n, n \in \mathbb{N}_0$ nennt man Eigenorts(kreis)zahlen. Daraus ergeben sich jeweils die

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\mu}k_n^4.$$

Setzen wir diese Ergebnisse für k_n in die Matrix ein erhalten wir die nicht-triviale Lösung

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_3 = \hat{c}_4 = 0, \qquad \hat{c}_2 \text{ beliebig.}$$

Eigenschwingungsformen:

$$W_n(x) = \hat{c}_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right).$$

Eigenschwingungen:

Die Eigenschwingungen ergeben sich als Eigenschwingungsformen multipliziert mit dem Zeitverlauf,

$$w_n(x,t) = \hat{c}_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cos(\omega_n t - \alpha_n).$$

Lösung der Differentialgleichung:

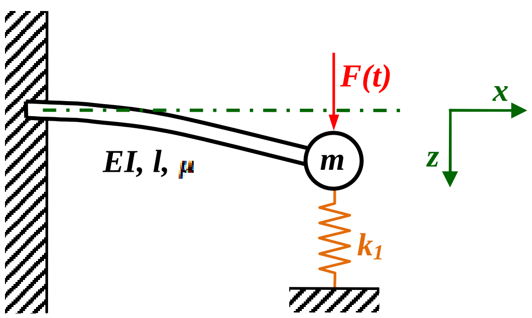
Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich als Linearkombination der Eigenschwingungen,

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t).$$

Diese kann noch an Anfangswertbedingungen (nicht Randbedingungen) angepasst werden, um die Werte für $\hat{c}_{2,n}$ zu bestimmen.

8.3 Beispiel: Erzwungene Balkenbiege-Schwingung

Am Ende eines Kragbalkens (Länge ℓ, Biegesteifigkeit $EI = \text{const}$, Massenbelegung/Streckendichte $\mu = \text{const}$) ist eine Maschine der Masse m angebracht. Sie ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) mit der Umgebung verbunden. Durch eine nicht ausgeglichene Unwucht wirkt eine Kraft $F(t) = \hat{F} \cos \Omega t$.



Feldgleichung:

In Abschnitt 8.2 haben wir die allgemeine Form der Feldgleichung hergeleitet. Diese lautet

$$EI\, w'''' + \mu \ddot{w} = q.$$

Hier fließt die Kraft F allerdings in die Randbedingungen ein, daher gilt $q = 0$.

Randbedingungen:

An der linken Seite haben wir keine Absenkung und keine Neigung. Daraus ergeben sich die Randbedingungen (1) und (2),

$$w\,(0,t) = 0,$$
$$w'(0,t) = 0.$$

Um die weiteren Randbedingungen herleiten zu können benötigen wir das Momentengleichgewicht an der rechten Seite sowie das Kräftegleichgewicht in z-Richtung. Es folgt

$$\begin{aligned} &M(\ell,t)=0,\\ &Q(\ell,t)=F(t)-k_1 w(\ell,t)-m\ddot{w}(\ell,t). \end{aligned}$$

In vorigen Abschnitten hatten wir bereits hergeleitet

$$\begin{aligned} &M=\ -EI\,w'',\\ &Q=M'=EI\,w'''. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichgewichte ein ergeben sich die Randbedingungen (3) und (4) für die rechte Seite des Kragbalkens,

$$\begin{aligned} &w''(\ell,t)=0,\\ &m\ddot{w}(\ell,t)-EI\,w'''(\ell,t)+k_1 w(\ell,t)=\hat{F}\cos(\Omega t). \end{aligned}$$

Separationsansatz:

Die letzte Randbedingung ist inhomogen, daher werden wir den Gleichtaktansatz

$$w(x,t)=W(x)\cdot\cos\Omega t.$$

verwenden. Durch Einsetzen in die Feldgleichung erhalten wir

$$EI\,W''''(x)\cos\Omega t-\mu\Omega^2 W(x)\cos\Omega t=0.$$

Da die Gleichung für alle t erfüllt sein muss, können wir eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für $W(x)$ angeben,

$$W''''(x)-\frac{\mu\Omega^2}{EI}W(x)=0.$$

Wie im vorigen Kapitel definieren wir $k^4 \coloneqq \frac{\mu\Omega^2}{EI}$. Die Allgemeine Lösung für W erhalten wir erneut mittels $e^{\kappa x}$-Ansatz, $W=\widehat{W}e^{\kappa x}$. Wie im Vorigen Abschnitt lautet die allgemeine Lösung also

$$W(x)=\hat{c}_1\cos(kx)+\hat{c}_2\sin(kx)+\hat{c}_3\cosh(kx)+\hat{c}_4\sinh(kx).$$

Anpassen an Randbedingungen:

Um die Koeffizienten an die Randbedingungen anpassen zu können benötigen wir die ersten drei Ableitungen von $W(x)$.

$$W'(x)=k\big(-\hat{c}_1\sin(kx)+\hat{c}_2\cos(kx)+\hat{c}_3\sinh(kx)+\hat{c}_4\cosh(kx)\big),$$

$$W''(x)=k^2\big(-\hat{c}_1\cos(kx)-\hat{c}_2\sin(kx)+\hat{c}_3\cosh(kx)+\hat{c}_4\sinh(kx)\big),$$

$$W'''(x)=k^3\big(\hat{c}_1\sin(kx)-\hat{c}_2\cos(kx)+\hat{c}_3\sinh(kx)+\hat{c}_4\cosh(kx)\big).$$

Zur Notationsvereinfachung definieren wir

$$\begin{aligned} c&=\cos k\ell, &\quad s&=\sin k\ell,\\ C&=\cosh k\ell, &\quad S&=\sinh k\ell. \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen (1) bis (4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ -k^2 c & -k^2 s & k^2 C & k^2 S \\ \begin{pmatrix} (k_1 - m\Omega^2)c \\ -EIk^3 s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (k_1 - m\Omega^2)s \\ +EIk^3 c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (k_1 - m\Omega^2)C \\ -EIk^3 S \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (k_1 - m\Omega^2)S \\ -EIk^3 C \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ \hat{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{F} \end{pmatrix}.$$

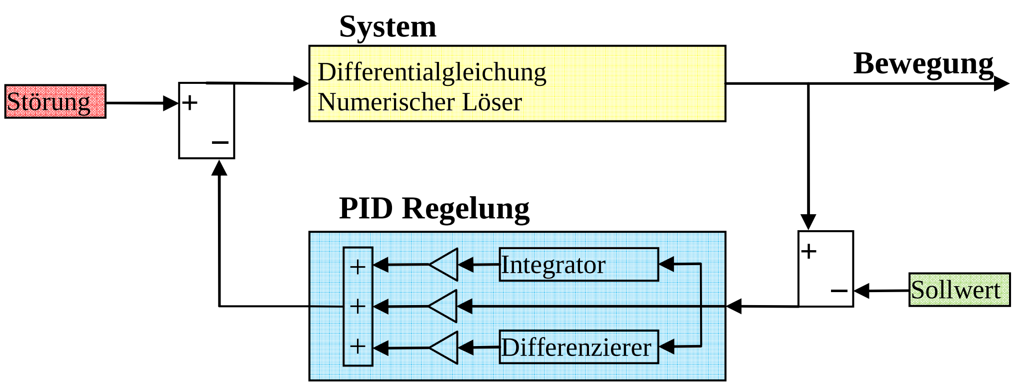
Aus der ersten Zeile folgt direkt $\hat{c}_1 = -\hat{c}_3$, aus der zweiten Zeile $\hat{c}_2 = -\hat{c}_4$. Es ist also ausreichend, ein 2×2 System zu lösen, um die Konstanten $\hat{c}_1$ und $\hat{c}_2$ zu berechnen. Die allgemeine Lösung lautet nun

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\left\{ \frac{\hat{F} \cos \Omega t}{2(k_1 - m\Omega^2)(sC - cS) - 2EIk^3(1 + cC)} \right\} \\ &\cdot \{(s + S)(\cos kx - \cosh kx) - (c + C)(\sin kx - \sinh kx)\}. \end{aligned}$$

9 Regelung dynamischer Systeme

PID Regelung

Der PID Regler besteht aus drei Teilen, dem P-Regler mit proportionalen Verhalten, dem I-Regler mit integralem Verhalten und dem D-Regler mit differentialem Verhalten. So wird versucht, die Ausgabe eines Systems, zum Beispiel die Lösung einer Differentialgleichung oder ein daraus abgeleiteter Wert, hier die Bewegung eines Systems, möglichst nahe an einem gewissen Sollwert zu halten. Dagegen wirkt außerdem eine externe Störung. Der PID Regler erhält als Input die Differenz $e(t)$ aus Ist-Wert und Soll-Wert.



P-Regler

Der P-Regler multipliziert $e(t)$ lediglich mit einem konstanten Anteil, die Ausgabe ist also proportional zum Eingang. Der P-Regler reagiert unmittelbar auf den Eingang. Ist das System eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, erhält als Eingabe also die Beschleunigung, so kann der P-Regler physikalisch als Federkraft die entgegen dem Fehler $e(t)$ wirkt interpretiert werden.

I-Regler

Der I-Regler integriert den Fehler $e(t)$ über die Zeit auf, Fehler wirken also auch zeitverzögert nach. Theoretisch kann der Korrektur-Anteil des I-Reglers also beliebig groß werden.

D-Regler

Der D-Regler differenziert die Eingabe $e(t)$ und multipliziert das Ergebnis mit einem konstanten Faktor. Man kann also sagen, er versucht durch die Ableitung die zukünftige Entwicklung vorherzusagen. Physikalisch kann man ihn auch als eine Art Dämpfung auffassen.

Anhang

A. Freikörperbilder