

Sommersemester 2012

MMSM 2, Vorlesung 2

Dr.-Ing. Ulrich Simon

Dipl.-Math. Bernhard Wieland

Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (UZR)

www.uni-ulm.de/uzwr

2 Allgemeines

2.1 Ziel der Vorlesung

- Reale dynamische Probleme in Mathematik übersetzen können.
- Probleme lösen können (Methoden, Werkzeuge).
- Ergebnisse verständlich darstellen können.

2.2 Gliederung

- Grundlagen aus der Statik
- Kinetik
- Dynamik
- Schwingungen von 1 FG
- Schwingungen von n FG
- Kontinuums-Schwingungen
- Regelung

3 Grundlagen aus der Statik

- 3.1 Größen, Dimensionen, Einheiten**
- 3.2 Kraft, Moment, Freikörperbild**
- 3.3 Spannung, Dehnung, Werkstoffgesetze**

Kurze Wiederholung aus dem Wintersemester

3.1 Größen, Dimensionen, Einheiten

Standard: ISO 31, DIN 1313

Größe = Zahlenwert · Einheit

Länge $L = 2 \cdot \text{m} = 2 \text{ m}$

{Größe} = Zahlenwert

[Größe] = Einheit

falsch: ~~Länge L [m]~~ richtig: Länge L / m
oder Länge L in m

SI-Basiseinheiten (Mechanik):

m (Meter), kg (Kilogramm), s (Sekunde), K (Kelvin)

3.2 Kraft, Moment, Freikörperbild, statisches Gleichgewicht

Die Kraft

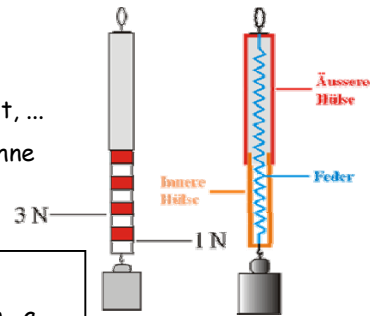
- Kräfte aus Erfahrung bekannt: Muskelkraft, ...
- Der Begriff „Kraft“ ist axiomatisch, d.h. ohne Definition.

Zweites Newtonsches Axiom:

Kraft = Masse · Beschleunigung oder $F = m \cdot a$

Zum Merken:

Die Kraft ist die Ursache für eine Beschleunigung (Bewegungsänderung) oder eine Verformung (Dehnung) eines Körpers.



Einheit der Kraft

Newton

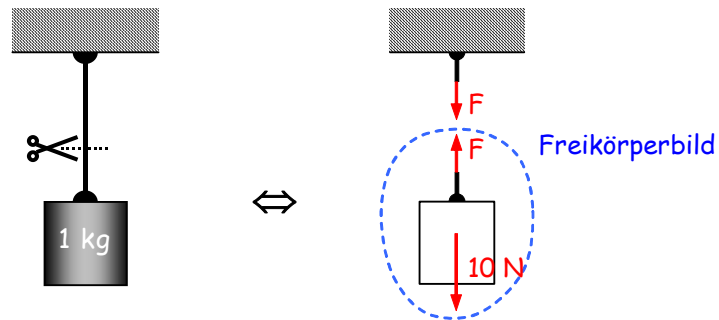
$$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$



Zum Merken:

Gewichtskraft einer Tafel Schokolade ≈ 1 Newton

Schnittprinzip (Euler) und Freikörperbild



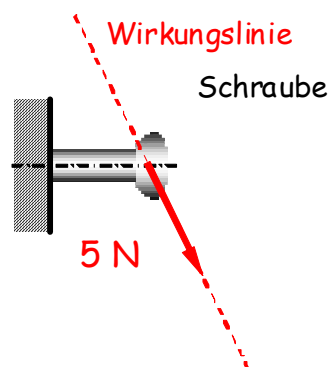
Zum Merken:

Erst schneiden dann Kräfte und Momente eintragen.

Freikörperbild = völlig freigeschnittenes Teilsystem

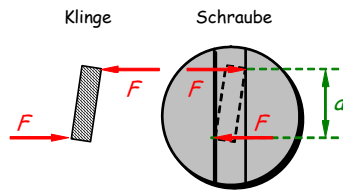
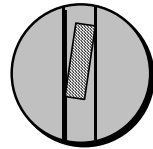
Darstellen von Kräften

Kräfte sind
vektorielle Größen
mit Betrag und Richtung.

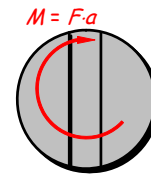


Das Moment

Schlitzschraube mit
Schraubenzieher-
Klinge (belastet)



Kräftepaar (F, a)



Moment M

Zum Merken:

Ein Moment ist die Ursache für eine Dreh-Beschleunigung (Bewegungsänderung) oder eine (Dreh-) Verformung (Torsion, Biegung) eines Körpers.

Zum Denken:

Moment gleich "Drehkraft"

Einheit des Moments

Newton-Meter

$$\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

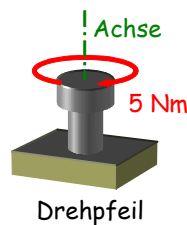
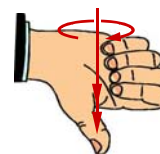
Darstellung von Momenten

... mit Drehpfeilen oder
Doppelpfeilen

Momente sind *vektorielle*
Größen

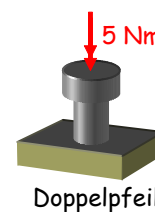
- Betrag
- Richtung
- Richtungssinn

Rechte-Hand-Regel:



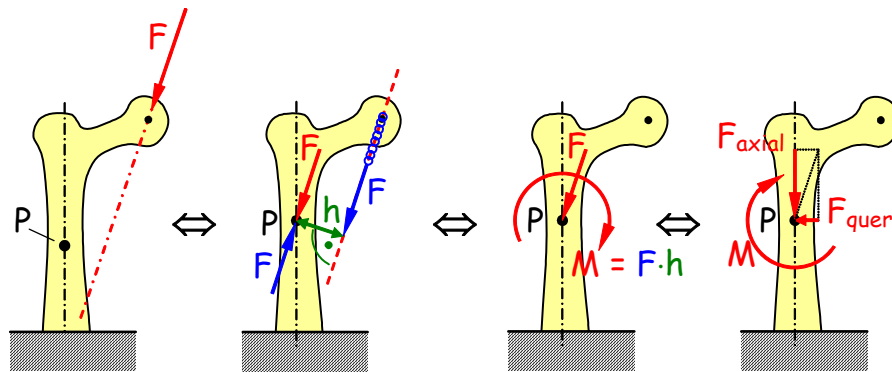
Drehpfeil

oder



Doppelpfeil

Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes P



Zum Merken:

Moment = Kraft mal Hebelarm
(Hebelarm senkrecht zur Wirkungslinie)

Verschiedene Schnittkräfte und -momente

Schnitt durch ...

- a) Seil
- b) Balken 2D
- c) Balken 3D
- d) (Scharnier-)Gelenk in 2D
- e) Allg. Punktkontakt
- f) Allg. Schnitt durch 3D Körper
(Kartoffel)

Freiheitsgrade, Bindungen

Freiheitsgrade [degrees of Freedom, DOF]:

<i>Objekt</i>	<i>Freiheitsgrade f</i>	<i>Bewegungsarten</i>
Punktmasse in 2D		
Punktmasse in 3D		
Starrer Körper in 2D		
Starrer Körper in 3D		
n starre Körper in 3D		

Freiheitsgrade, Bindungen

Freiheitsgrade [degrees of Freedom, DOF]:

<i>Objekt</i>	<i>Freiheitsgrade f</i>	<i>Bewegungsarten</i>
Punktmasse in 2D	2	2 Translationen
Punktmasse in 3D	3	3 Translationen
Starrer Körper in 2D	3	2 Transl., 1 Rotation
Starrer Körper in 3D	6	3 Transl., 3 Rotation
n starre Körper in 3D	n x 6	...

Systeme von n starren Körpern mit Bindungen b [constraints]:

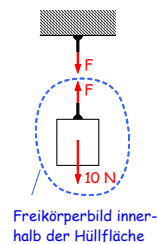
$$f = 3n - b \quad (\text{in 2D})$$

$$f = 6n - b \quad (\text{in 3D})$$

Statische Bestimmtheit

	<i>System ist statisch ...</i>		
	<i>unbestimmt</i>	<i>bestimmt</i>	<i>überbestimmt</i>
Freiheitsgrade $f = 6n - b$	> 0	$= 0$	< 0
Gleichungssystem	→ Dynamik	bestimmt Sechs Gleichungen für sechs unbekannte Auflagerkräfte /-momente	unterbestimmt Redundante Bindungen führen zu nichteindeutigen Lösungen

Statisches Gleichgewicht



Wichtig:

Gleichgewicht nur an "Freikörperbildern"

3 Gleichgewichtsbedingungen für FKB in 2D:

$$\begin{aligned}\text{Summe aller Kräfte in x - Richtung : } & F_{1,x} + F_{2,x} + \dots = 0, \\ \text{Summe aller Kräfte in y - Richtung : } & F_{1,y} + F_{2,y} + \dots = 0, \\ \text{Summe aller Momente bezüglich P : } & M_{1,z}^P + M_{2,z}^P + \dots = 0.\end{aligned}$$

- KräfteGG können durch MomentenGG ersetzt werden, aber ...
- 3 MomentenGG dürfen nicht auf einer Geraden liegen

6 Gleichgewichtsbedingungen für FKB in 3D:

$$\begin{aligned}\text{Summe aller Kräfte in x - Richtung : } & \sum_i F_{ix} = 0, \\ \text{Summe aller Kräfte in y - Richtung : } & \sum_i F_{iy} = 0, \\ \text{Summe aller Kräfte in z - Richtung : } & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \text{Summe aller Momente um x - Achse bezüglich Punkt P : } & \sum_i M_{ix}^P = 0, \\ \text{Summe aller Momente um y - Achse bezüglich Punkt Q : } & \sum_i M_{iy}^Q = 0, \\ \text{Summe aller Momente um z - Achse bezüglich Punkt R : } & \sum_i M_{iz}^R = 0.\end{aligned}$$

- KräfteGG können durch MomentenGG ersetzt werden, aber ...
- Max. 2 MomentenGG um parallele Achsen

Lösungsrezept

Schritt 1: Modellbildung. Generieren eines Ersatzmodells (Skizze mit Geometrie, Lasten, Einspannungen). Weglassen unwichtiger Dinge. Das "reale System" muss abstrahiert werden.

Schritt 2: Koordinaten (Wege, Winkel) einführen. Ausgelenktes System hinzeichnen und Auslenkungen gegenüber Referenzlage beschreiben.

Schritt 3: Schneiden, FKB: System aufschneiden, Schnittkräfte/-momente, → Freikörperbild (FKB).

Schritt 4: Gleichgewichte: Kräfte-/Momentengleichgewichte für Freikörper anschreiben → Gleichungen.

Schritt 5: Gleichungen lösen.

Schritt 6: Auswerten: Ergebnisse prüfen, deuten, darstellen.

Verifizieren: Mathematisch korrekt? Plausibilität, Konvergenz, ... prüfen.

Validieren: Annahmen gültig? Mit Experimenten vergleichen.

3.3 Spannung, Dehnung, Werkstoffgesetze

Die Spannung



Definition der Spannung

$$\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

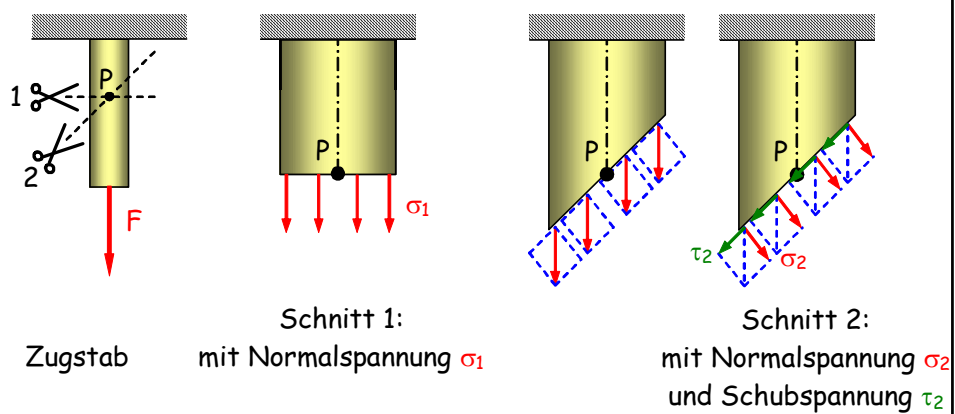
Zum Merken:

Spannung = „verschmierte“ Schnittkraft,
Spannung = Kraft pro Fläche oder $\sigma = F/A$

Einheit der Spannung

Mega-Pascal: $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$
Pascal: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Normal- und Schubspannungen



Allgemeiner (3D) Spannungszustand ...

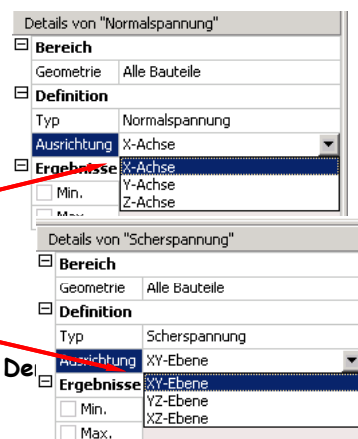
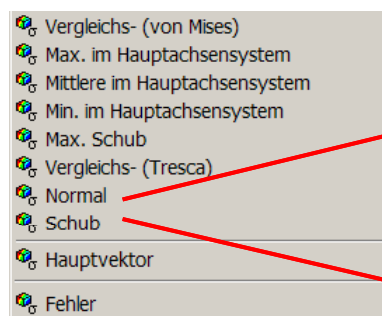
... in einem Punkt des Körpers:

- Drei Spannungskomponenten in einem Schnitt (Normalsp., 2x Schubsp.)
mal
- Drei Schnitte (z.B. frontal, sagittal, transversal)
gleich
- Neun Spannungskomponenten, die den vollständigen 3d Spannungszustand in einem Punkt im Körper kennzeichnen.
- Sechs Komponenten davon sind unabhängig („Gleichheit der Schubsp.“)

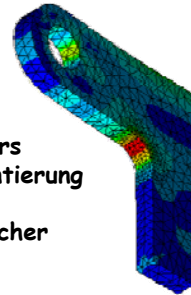
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Der „Spannungstensor“}$$

Allgemeiner Spannungszustand ...

Sechs Komponenten



- Problem: Will man bunte Bilder machen, muss man sich für eine Komponente entscheiden.
- Aber welche soll man nehmen?
- Man kann statt einer einzelnen auch „Mischungen“ der Komponenten- verwenden.
- So genannte „Invarianten“ sind nichts weiter als besonders „schlaue“ Mischungen bei denen unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems das selbe rauskommt: „Hauptspannungen“, „Von-Mises-Spannung“, „Hydrostatischer Spannungsanteil“, „Oktaeder-Schubspannung“, ...



- Vergleichs- (von Mises)
- Max. im Hauptachsensystem
- Mittlere im Hauptachsensystem
- Min. im Hauptachsensystem
- Max. Schub
- Vergleichs- (Tresca)
- Normal
- Schub

$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2}$$

Dehnungen

DETAILS

- Seiltyp: Einfachseil
- Durchmesser: 10.5 mm
- Imprägnierung: ohne
- Gewicht: 72 g pro Meter
- Fangstoß: 9.6 kN
- Anz. Stürze: 10
- Mantelverschiebung: 0 mm
- **Dehnung statisch: 7.7 %**
- **Dehnung dynamisch: 32 %**
- Knotbarkeit: 0.7
- Farbe: mix



Zum Merken:

Dehnung = relative Längenänderung (Winkeländerung)

Definition der Dehnung

$$\text{Dehnung} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Ursprungs länge}}$$

Einheit der Dehnung

Ohne Einheit, also z.B.:

1

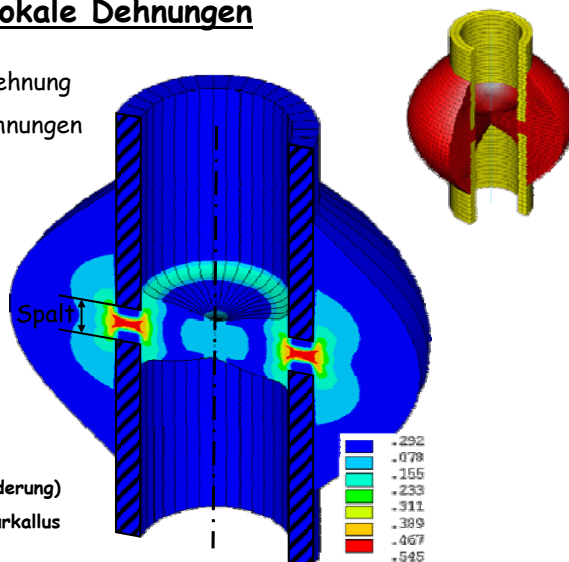
1/100 = %

1/1.000.000 = $\mu\epsilon$ (micro strain) = 0,1 %

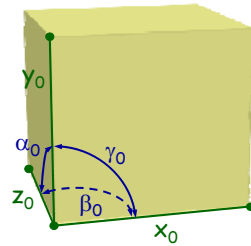
Globale oder lokale Dehnungen

- Globale, äußere Dehnung
- Lokale, innere Dehnungen

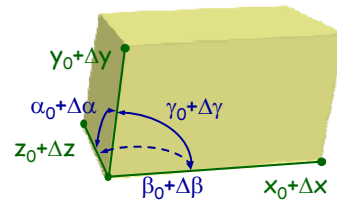
Dehnung (Gestaltänderung)
im Frakturkallus



Definition des lokalen Dehnungszustands



unverformt
(spannungsfrei)



verformt
(Spannungen an allen Oberflächen)

Definition des lokalen Dehnungszustands

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \varepsilon_{yy} = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y_0}, \quad \varepsilon_{zz} = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{z_0}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \Delta \gamma, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta \beta, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta \alpha$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = \{x, y, z\}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Der „Dehnungstensor“

Werkstoffgesetze

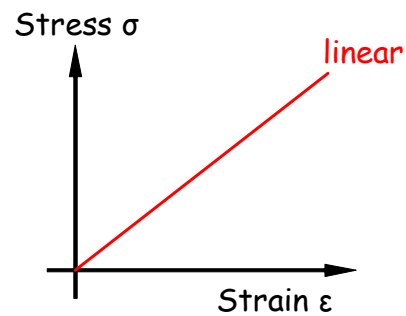
... verknüpfen Spannungen und Dehnungen miteinander

Lineares Werkstoffgesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

sym

E - Elastizitätsmodul, E-Modul [Young's modulus]

ν - Querkontraktionszahl [Poisson's ratio] (0 ... 0.3 ... 0.5)

- Voll besetzter Tensor 4. Stufe für drei Dimensionen (81)
- Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen (Boltzmann Kontinua) und Scherdehnungen (36)
- Maxwell'scher Reziprozitätssatz → Volle Anisotropie (21)
- Orthotropic (9)
- Transverse Isotropic (5)
- Isotropy (2)

Zum Merken:

Ein linear-elastisches, isotropes Werkstoffverhalten wird durch **zwei** Werkstoffparameter gekennzeichnet:

z.B.: **E** und **ν**

Ein allgemeines anisotropes Werkstoffgesetz besitzt 21 Werkstoffparameter.

Zwei von:

E - Elastizitätsmodul, E-Modul [Young's modulus]

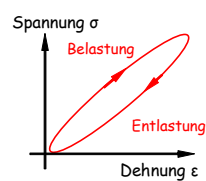
ν - Querkontraktionszahl [Poisson's ratio] ($0 \dots \underline{0.3} \dots 0.5$)

G - Schubmodul [Shear modulus]

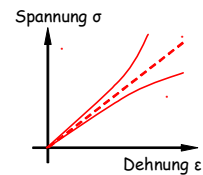
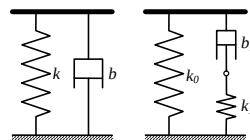
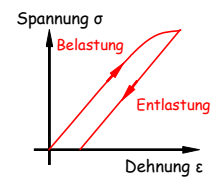
K - Kompressionsmodul [Bulk modulus]

μ, λ - Lamesche Konstanten [Lame Constants]

Kompliziertere Werkstoffgesetze:

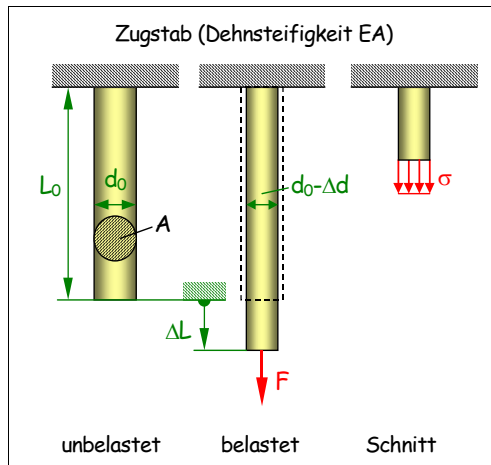


- Nicht-linear
- Nicht-elastisch, plastisch
- Anisotrop
- Viskoelastisch, Typ: innere Dämpfung
- Viskoelastisch, Typ: Gedächtniseffekt



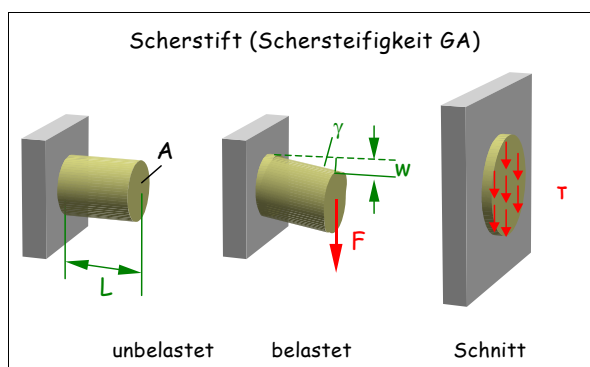
Vier einfache Lastfälle:

a. Zug und Druck



$$F = \frac{EA}{L_0} \Delta L, \quad k = \frac{EA}{L_0}$$

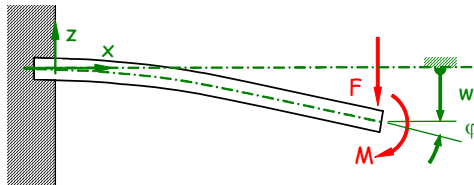
b. Scherung



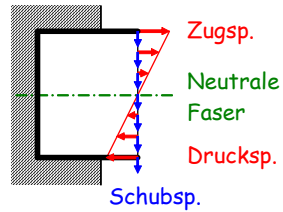
$$F = \frac{GA}{L} w, \quad k = \frac{GA}{L}$$

c. Biegung (Kragbalken)

Kragbalken (Biegesteifigkeit EI_a , Länge L)



Schnitt

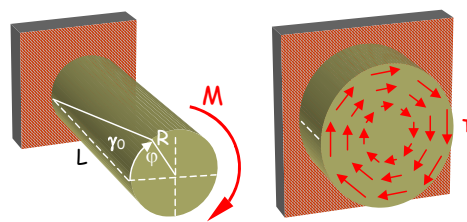


$$w = \frac{L^3}{3EI_a} F + \frac{L^2}{2EI_a} M,$$

$$\varphi = \frac{L^2}{2EI_a} F + \frac{L}{EI_a} M.$$

d. Torsion

Torsionsstab (Torsionssteifigkeit GI_T)



Länge L , Radius r

Schnitt

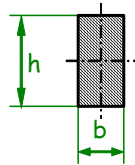
$$M = \frac{GI_T}{L} \varphi, \quad c = \frac{GI_T}{L}$$

Zum Merken:

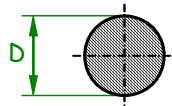
Der Röhrenknochen hat eine günstige (materialsparende) Gestalt bei Torsions- und Biegebeanspruchungen.

Flächenmomente

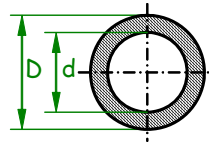
Rechteck:



Vollkreis:



Rohr:



Axiales Flächenmoment zweiten Grades

$$I_a = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_a = \frac{\pi}{64} D^4$$

$$I_a = \frac{\pi}{64} (D - d)^4$$

Polares Flächenmoment zweiten Grades

$$I_T = I_P = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$I_T = I_P = \frac{\pi}{32} (D - d)^4$$