Wiederholungen aus

MMSM 1 (Statik)

Dr.-Ing. Ulrich Simon
Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (UZWR)
www.uni-ulm.de/uzwr

Inhalt

- Größen, Dimensionen, Einheiten
- Kraft, Moment, Freikörperbild
- Statisches Gleichgewicht
- Spannung, Dehnung, Werkstoffgesetze
- Einfache Lastfälle

Größen, Dimensionen, Einheiten

Standard: ISO 31, DIN 1313

Größe = Zahlenwert · Einheit

Länge L = 2 · m = 2 m

{Größe} = Zahlenwert

[Größe] = Einheit

falsch: ~~Länge L [m]~~

richtig: Länge L / m

oder Länge L in m

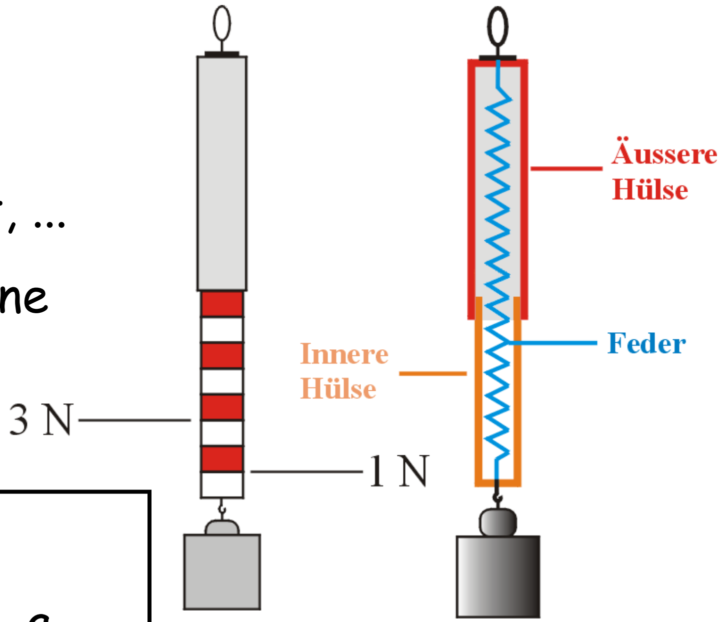
SI-Basiseinheiten (Mechanik):

m (Meter), kg (Kilogramm), s (Sekunde), K (Kelvin)

Kraft, Moment, Freikörperbild

Die Kraft [Force]

- Kräfte aus Erfahrung bekannt: Muskelkraft, ...
- Der Begriff „Kraft“ ist axiomatisch, d.h. ohne Definition.



Zweites Newtonsches Axiom:

Kraft = Masse · Beschleunigung oder $F = m \cdot a$

Zum Merken:

Die Kraft ist die Ursache für eine Beschleunigung (Bewegungsänderung) oder eine Verformung Dehnung) eines Körpers.

Einheit der Kraft

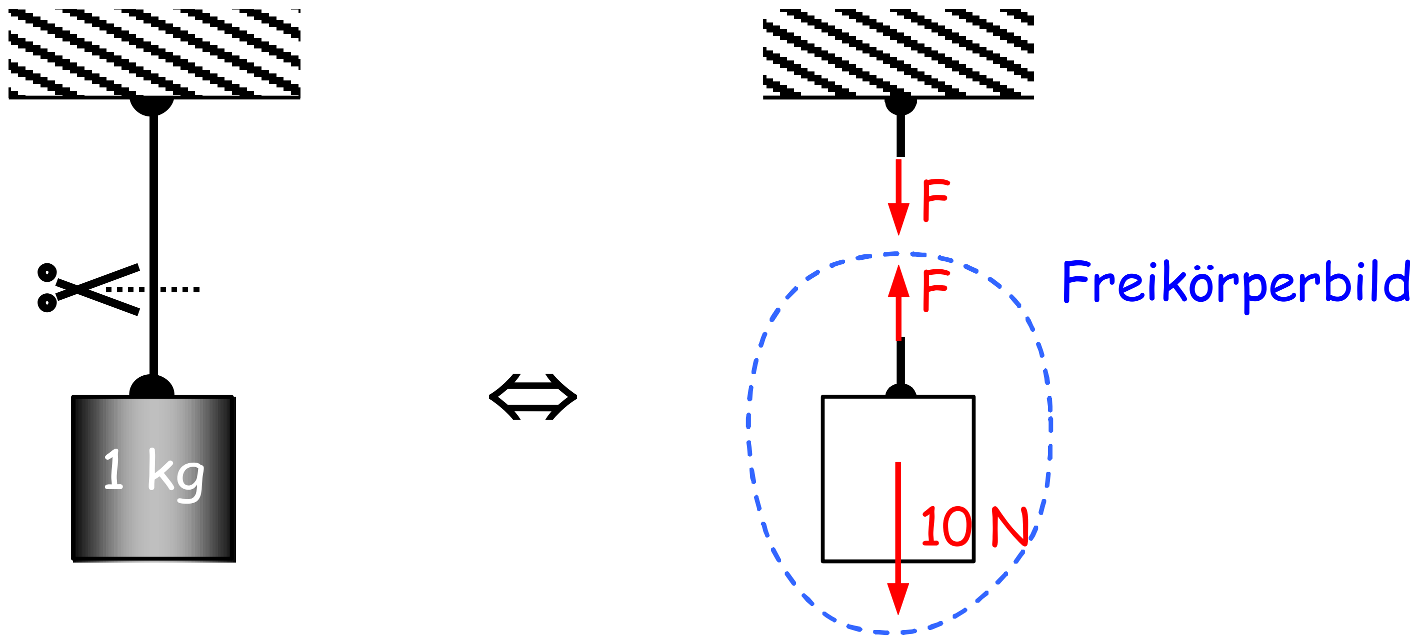
Newton

$N = kg \cdot m/s^2$

Zum Merken:

Gewichtskraft einer Tafel Schokolade ≈ 1 Newton

Schnittprinzip (Euler) und Freikörperbild



Zum Merken:

Erst schneiden dann Kräfte und Momente eintragen.

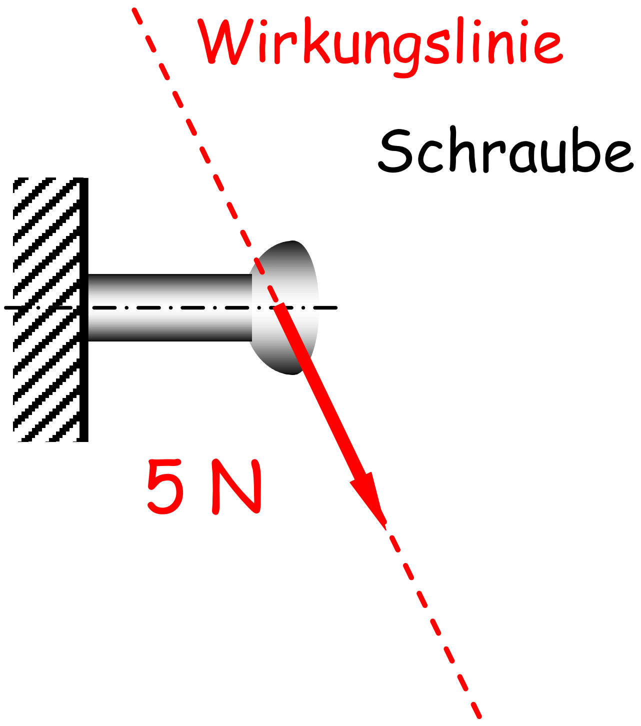
Freikörperbild = völlig freigeschnittenes Teilsystem

Darstellen von Kräften

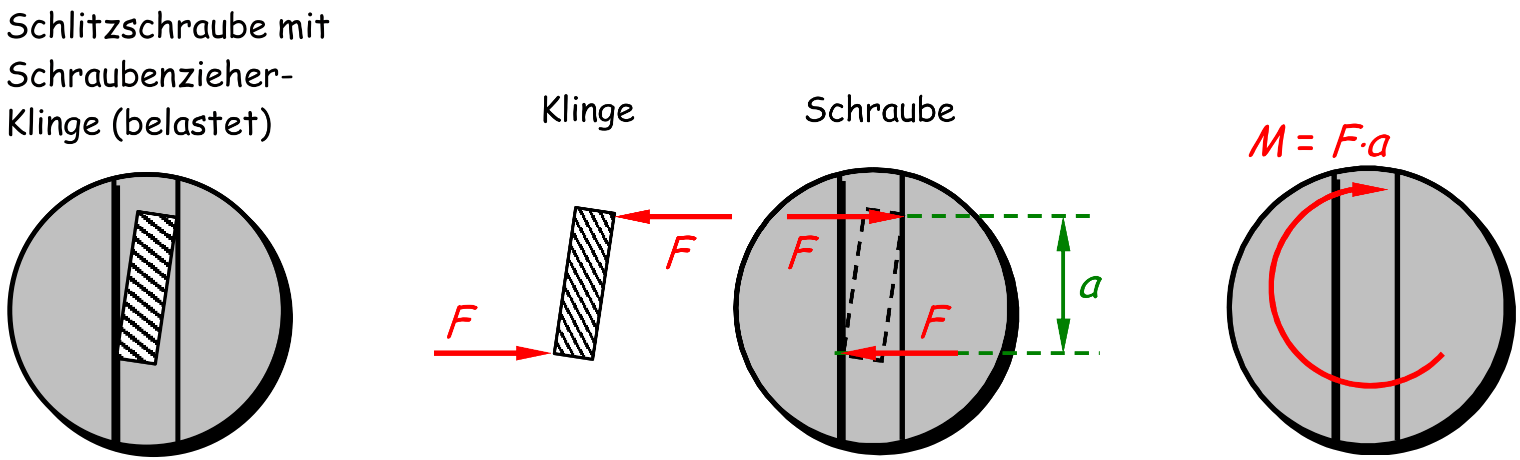
Kräfte sind

vektorielle Größen

mit **Betrag und Richtung.**



Das Moment [Moment]



Kräftepaar (*F*, *a*)

Moment *M*

Zum Merken:

Ein Moment ist die Ursache für eine Dreh-Beschleunigung (Bewegungsänderung) oder eine (Dreh-) Verformung (Torsion, Biegung) eines Körpers.

Zum Denken:

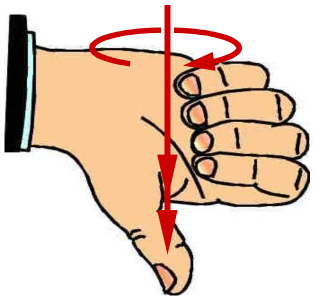
Moment gleich "Drehkraft"

Einheit des Moments

Newton-Meter

$N{\cdot}m \;=\; kg{\cdot}m^2/s^2$

Rechte-Hand-Regel:

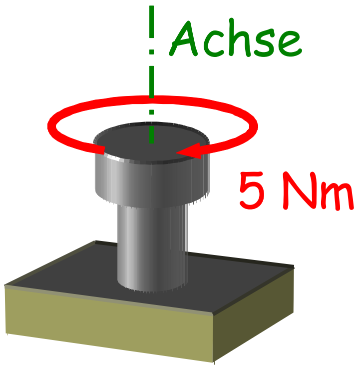


Darstellung von Momenten

... mit Drehpfeilen oder Doppelpfeilen

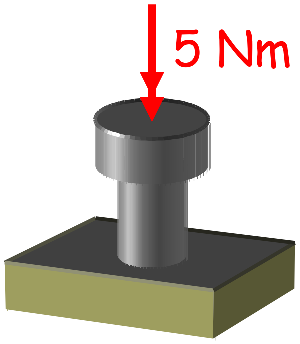
Momente sind *vektorielle* Größen

- **Betrag**
- **Richtung**
- **Richtungssinn**



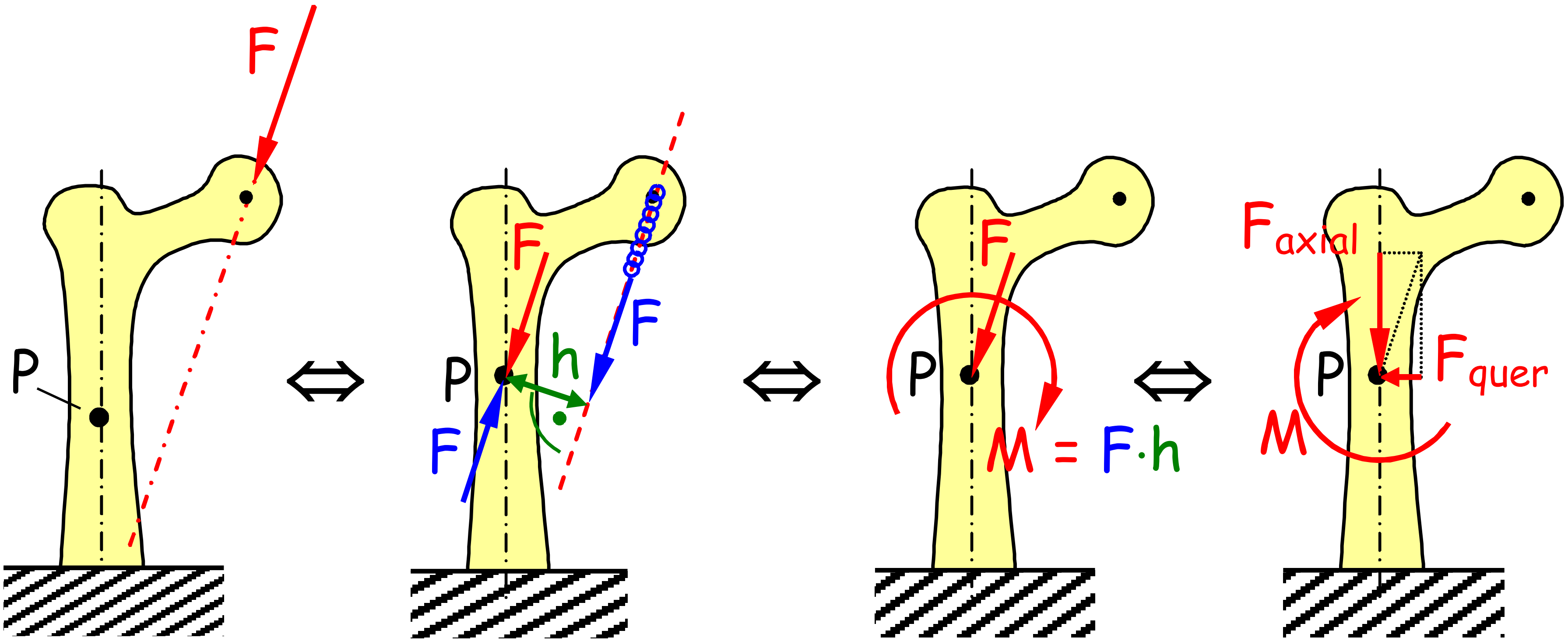
Drehpfeil

oder



Doppelpfeil

Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes P



Zum Merken:

Moment = Kraft mal Hebelarm

(Hebelarm senkrecht zur Wirkungslinie)

Verschiedene Schnittkräfte und -momente

Schnitt durch …

a) Seil
b) Balken 2D
c) Balken 3D
d) (Scharnier-)Gelenk in 2D
e) Allg. Punktkontakt
f) Allg. Schnitt durch 3D Körper (Kartoffel)

Freiheitsgrade, Bindungen

Freiheitsgrade [Degrees of Freedom, DOF]:

Objekt	*Freiheitsgrade f*	*Bewegungsarten*
Punktmasse in 2D		
Punktmasse in 3D		
Starrer Körper in 2D		
Starrer Körper in 3D		
n starre Körper in 3D		

Freiheitsgrade, Bindungen

Freiheitsgrade [degrees of Freedom, DOF]:

Objekt	*Freiheitsgrade f*	*Bewegungsarten*
Punktmasse in 2D	2	2 Translationen
Punktmasse in 3D	3	3 Translationen
Starrer Körper in 2D	3	2 Transl., 1 Rotation
Starrer Körper in 3D	6	3 Transl., 3 Rotation
n starre Körper in 3D	n x 6	…

Systeme von n starren Körpern mit Bindungen b [constraints]:

$f = 3n - b$ (in 2D)

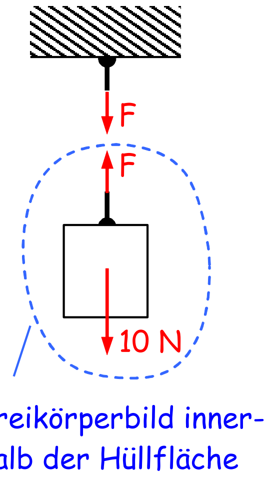
$f = 6n - b$ (in 3D)

Statische Bestimmtheit

	System ist statisch …		
	unbestimmt	***bestimmt***	***überbestimmt***
Freiheitsgrade $f = 6n - b$	> 0	$= 0$	< 0
Gleichungs- system	→ Dynamik	**bestimmt** Sechs Gleichungen für sechs unbekannte Auflagerkräfte /-momente	**unterbestimmt** Redundante Bindungen führen zu nichteindeutigen Lösungen

Statisches Gleichgewicht

Statisches Gleichgewicht



Wichtig:

Gleichgewicht nur an "Freikörperbildern"

3 Gleichgewichtsbedingungen für FKB in 2D:

$$\text{Summe aller Kräfte in x-Richtung:} \quad F_{1,x} + F_{2,x} + \ldots \overset{!}{=} 0,$$

$$\text{Summe aller Kräfte in y-Richtung:} \quad F_{1,y} + F_{2,y} + \ldots \overset{!}{=} 0,$$

$$\text{Summe aller Momente bezüglich P:} \quad \underbrace{M_{1,z}^{P} + M_{2,z}^{P} + \ldots}_{\text{Explizit gegeb. Momente}} + \underbrace{F_{1,x}h_1 + F_{2,x}h_2 + \ldots}_{\text{Momente aus Kraft mal Hebelarm}} \overset{!}{=} 0.$$

- Kräfte-GG können durch Momenten-GG ersetzt werden, aber …
- die 3 Bezugspunkte dieser Momenten-GGs dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
- Kräfte-GG sind wie Momenten-GG mit Bezugspunkt im Unendlichen

6 Gleichgewichtsbedingungen für FKB in 3D:

Summe aller Kräfte in x-Richtung: $\sum_i F_{ix} \overset{!}{=} 0,$

Summe aller Kräfte in y-Richtung: $\sum_i F_{iy} \overset{!}{=} 0,$

Summe aller Kräfte in z-Richtung: $\sum_i F_{iz} \overset{!}{=} 0,$

Summe aller Momente um x-Achse bezüglich Punkt P: $\sum_i M_{ix}^{P} \overset{!}{=} 0.$

Summe aller Momente um y-Achse bezüglich Punkt Q: $\sum_i M_{iy}^{Q} \overset{!}{=} 0.$

Summe aller Momente um z-Achse bezüglich Punkt R: $\sum_i M_{iz}^{R} \overset{!}{=} 0.$

- Kräfte-GGs können durch Momenten-GGs ersetzt werden, aber …
- max. 2 Momenten-GGs um parallele Achsen

Lösungsrezept

Schritt 1: Modellbildung. Generieren eines Ersatzmodells (Skizze mit Geometrie, Lasten, Einspannungen). Weglassen unwichtiger Dinge. Das "reale System" muss abstrahiert werden.

Schritt 2: Koordinaten (Wege, Winkel) einführen. Ausgelenktes System hinzeichnen und Auslenkungen gegenüber Referenzlage beschreiben.

Schritt 3: Schneiden, FKB: System aufschneiden, Schnittkräfte/-momente, → Freikörperbild (FKB).

Schritt 4: Gleichgewichte: Kräfte-/Momentengleichgewichte für Freikörper anschreiben → Gleichungen.

Schritt 5: Gleichungen lösen.

Schritt 6: Auswerten: Ergebnisse prüfen, deuten, darstellen.

Verifizieren: Mathematisch korrekt? Plausibilität, Konvergenz, … prüfen.

Validieren: Annahmen gültig? Mit Experimenten vergleichen.

Spannungen, Dehnungen, Werkstoffgesetze

Die Spannung [Stress]

Fotos: Lutz Dürselen

Definition der Spannung

$$\sigma := \lim_{\Delta A \to 0}\left(\frac{\Delta F}{\Delta A}\right)$$

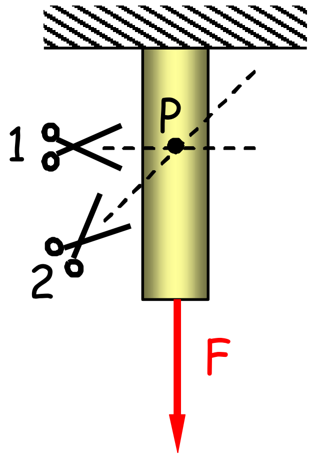
Zum Merken:

- Spannung = „verschmierte“ Schnittkraft
- Analogie: Nutella-Brot
- Spannung = Kraft pro Fläche oder $\sigma = F/A$

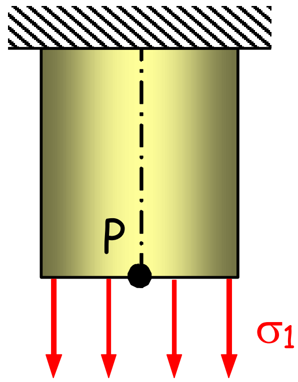
Einheit der Spannung

Pascal:	1 Pa = 1 N/m^2
Mega-Pascal:	1 MPa = 1 N/mm^2
Bar:	1 bar = 10^5 Pa = 0,1 MPa
Pound per Square-Inch:	30 PSI ≈ 2 bar

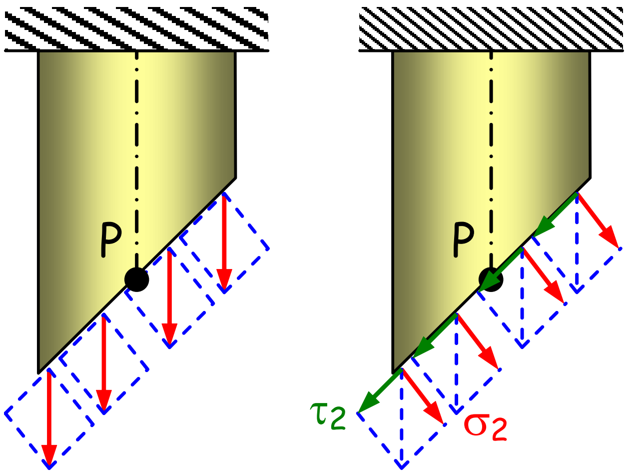
Normal- und Schubspannungen



Zugstab



Schnitt 1:
mit Normalspannung σ_1



Schnitt 2: mit Normalspannung σ_2
und Schubspannung τ_2

Allgemeiner (3D) Spannungszustand ...

... in einem Punkt des Körpers:

- 3 Spannungskomponenten pro Schnitt (Normalsp., 2x Schubsp.)

  *

- 3 Schnitte (lin. unabh.)

  =

- 9 Spannungskomponenten → Spannungstensor

  aber nur

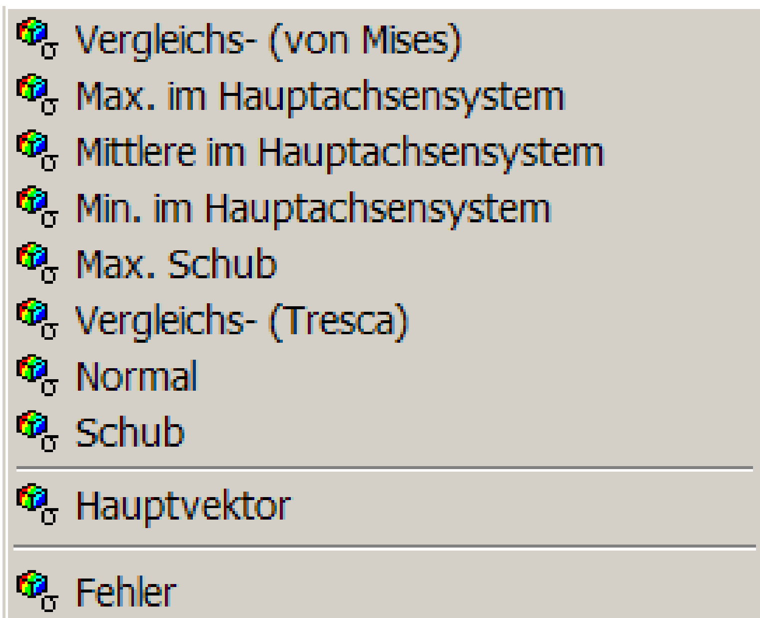
- 6 Komponenten davon sind unabhängig („Gleichheit der zugeord. Schubsp.“)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Der „Spannungstensor“

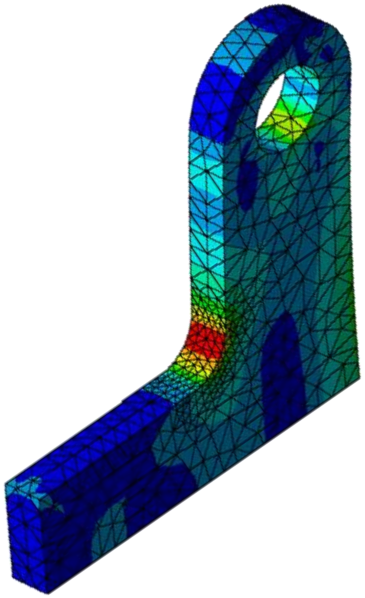
Allgemeiner Spannungszustand ...

Sechs Komponenten

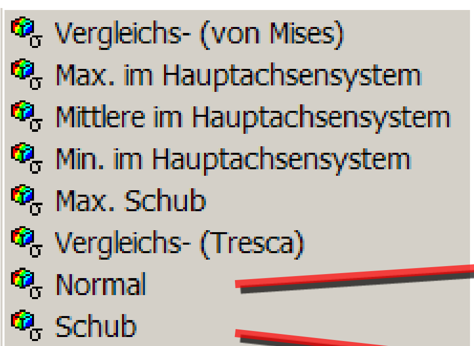


Der „Spannungstensor“

Darstellung von Spannungskomponenten

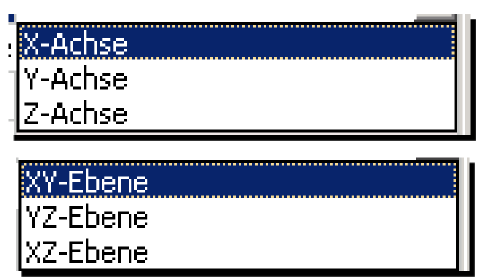


- Problem: Will man bunte Bilder machen, muss man sich (pro Bild) für <u>eine</u> Komponente entscheiden.
- Für die gesamte Information sind eigentlich alle 6 Bilder notwendig!
- Was tun, wenn man nur ein Bild zeigen will?
- Man kann <u>eine</u> „Mischung" der Komponenten verwenden.
- So genannte „Invariante" sind besonders „schlaue" Mischungen, da ihr Werte unabhängig vom willkürlich gewählten KOS bleibt.



$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_{xx}{}^2 + \sigma_{yy}{}^2 + \sigma_{zz}{}^2 - \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 3\,\tau_{xy}{}^2 + 3\,\tau_{xz}{}^2 + 3\,\tau_{yz}{}^2}$$

Invarianten



6 kartesische Komponenten

Dehnungen [Strain]

Beispiel: Kletterseil

- Durchmesser: 10.5 mm
- Imprägnierung: ohne
- Gewicht: 72 g pro Meter
- Fangstoß: 9.6 kN
- Anz. Stürze: 10
- Mantelverschiebung: 0 mm
- Dehnung statisch: 7.7 %
- Dehnung dynamisch: 32 %
- Knotbarkeit: 0.7
- Farbe: mix

Zum Merken:

Dehnung = relative Längenänderung (oder Winkeländerung)

Einfache technische Definition der uniaxialen Dehnung

$$\text{Dehnung} = \frac{\text{Längen - Änderung}}{\text{Ursprungs - Länge}}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Einheit der Dehnung

Ohne Einheit, also z.B.:

- m/m
- 1
- 1/100 = %
- 1/1.000.000 = με (micro strain)

Definition des lokalen 3D Dehnungszustands

6 Komponenten:

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{y_0 \to 0} \frac{\Delta y}{y_0}, \quad \varepsilon_{xx} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \varepsilon_{zz} = \lim_{y_0 \to 0} \frac{\Delta z}{z_0}$$

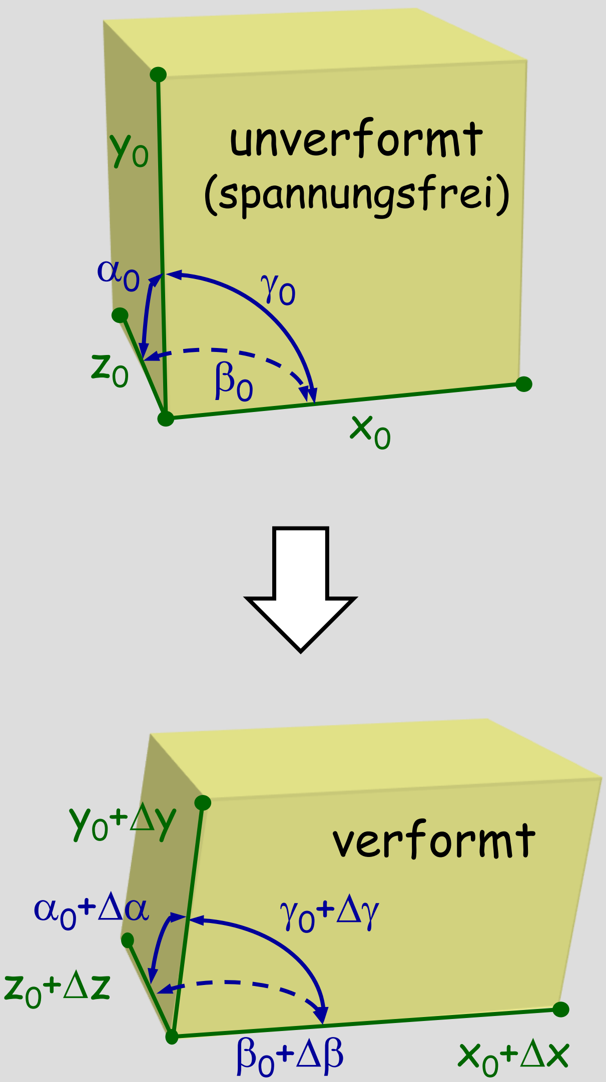
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\gamma, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\beta, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \Delta\alpha$$

oder:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad i, j = \{x, y, z\}$$

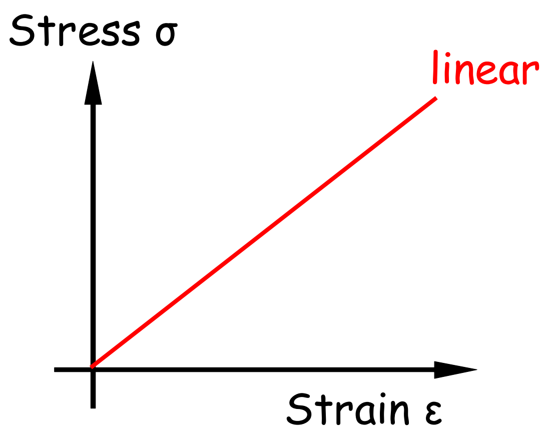
Dehnungstensor:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



Werkstoffgesetze [Material laws]

- Auch: „Konstitutive Gleichungen“
- Verknüpfen Spannungen und Dehnungen



Lineares Werkstoffgesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$ 1D, uni-axial, Hooke'sches Gesetz

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$ 3D mit Werkstoff-Tensor 4. Stufe

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$ … in Indexschreibweise

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}$$ 3D mit Werkstoff-Tensor 2. Stufe

Zustand/Symmetrieannahme	Anzahl der Werkstoffparameter
• Voll besetzter Tensor 4. Stufe für drei Dimensionen	81
• Gleichheit zugeord. Schubspannungen (Boltzmann Kontinua) und Scherdehnungen	36
• Maxwellscher Reziprozitätssatz → sogenannte „Volle Anisotropie“	21
• Orthotropie	9
• Transverse Isotropie	5
• Isotropie	2

Isotropie:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ \mathrm{sym} & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

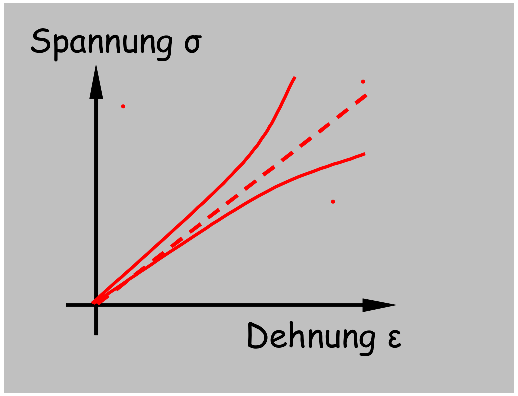
E - Elastizitätsmodul, E-Modul [Young's modulus]

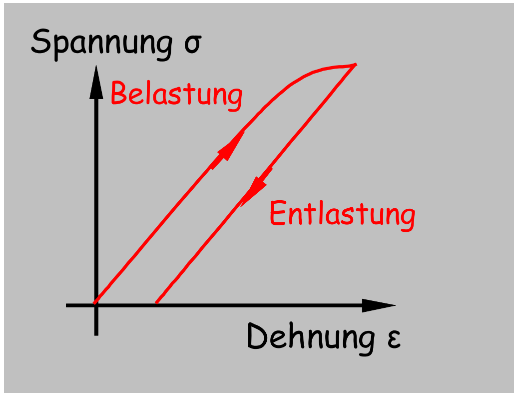
ν - Querkontraktionszahl [Poisson's ratio] (0 ... <u>0.3</u> ... 0.5)

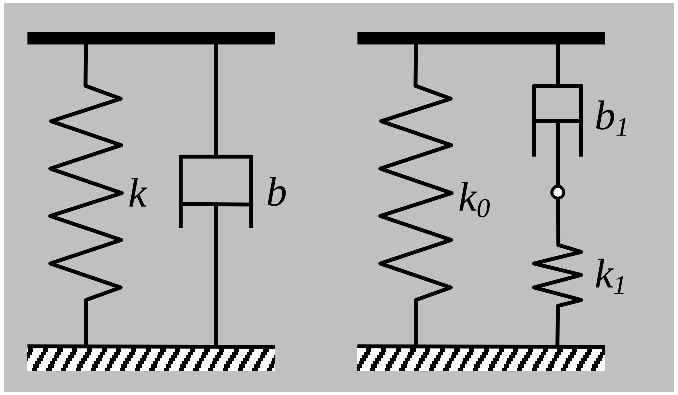
Komplizierte Werkstoffgesetze:

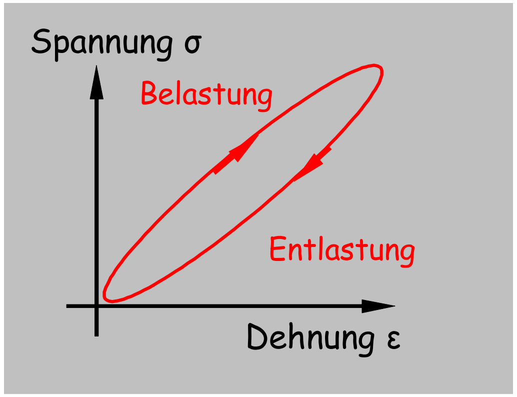
- **Nicht-linear**
- **Nicht-elastisch (= plastisch)**
- **Viskoelastisch, Typ: innere Dämpfung**

  Typ: Gedächtniseffekt



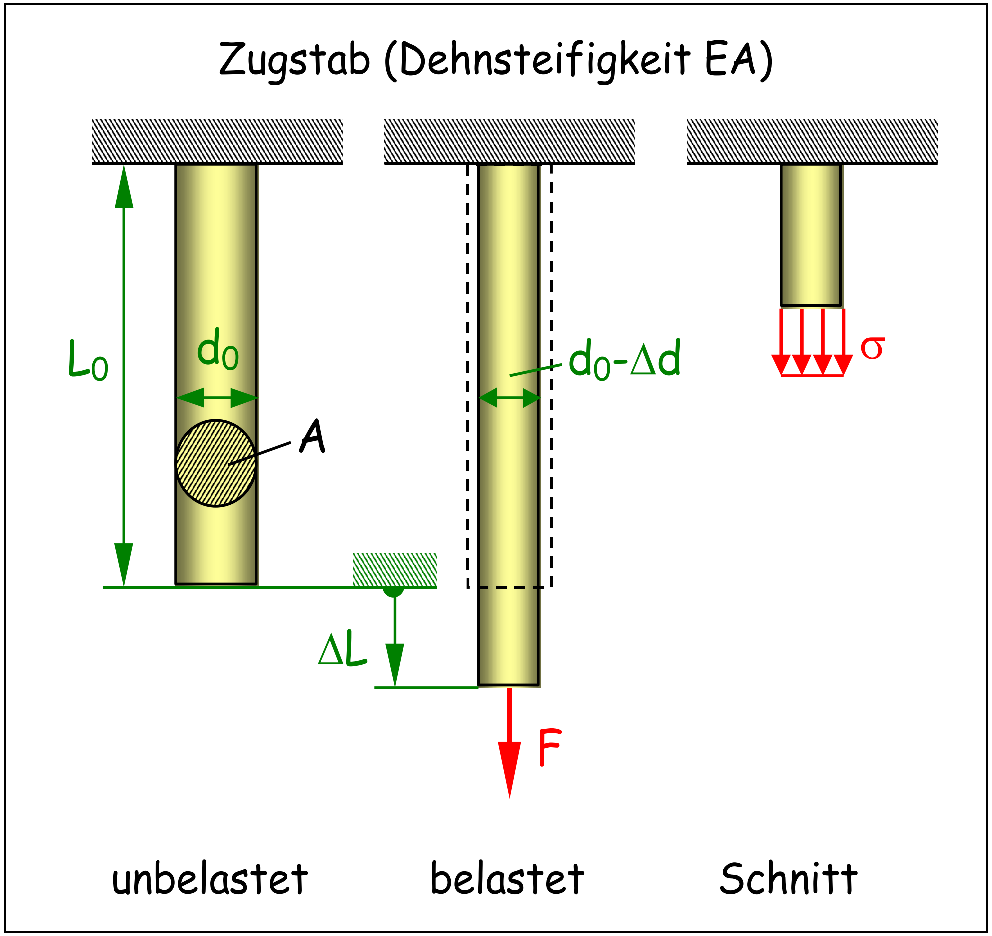






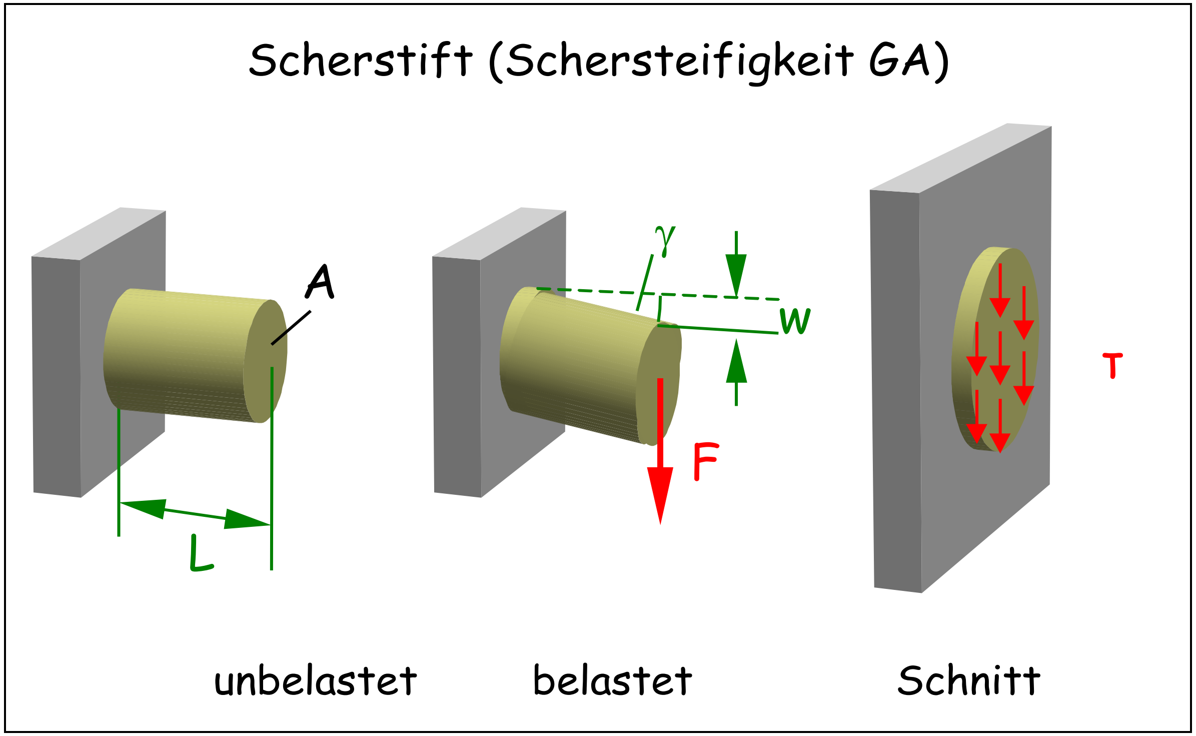
4 einfache Lastfälle

1 Zug und Druck



$$F = \frac{EA}{L_0}\Delta L, \quad k = \frac{EA}{L_0}$$

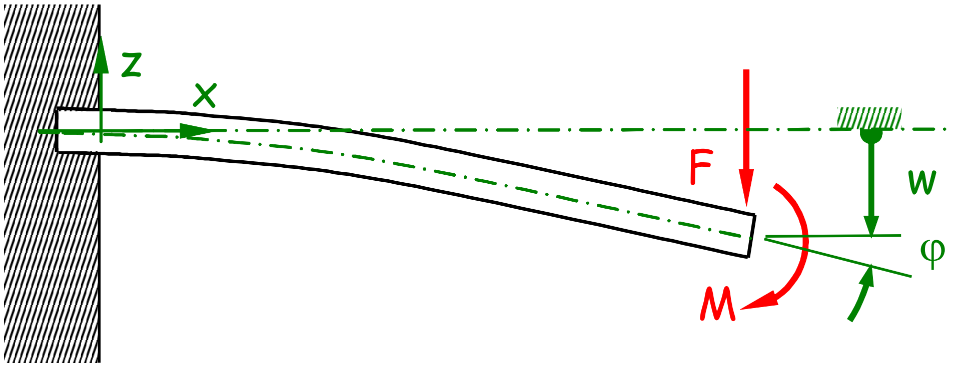
2 Scherung



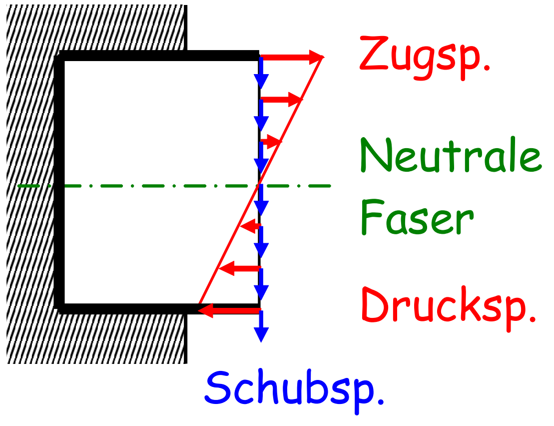
$$F = \frac{GA}{L} w, \quad k = \frac{GA}{L}$$

3 Biegung (Kragbalken [Cantilever beam])

Kragbalken (Biegesteifigkeit EI_a, Länge L)



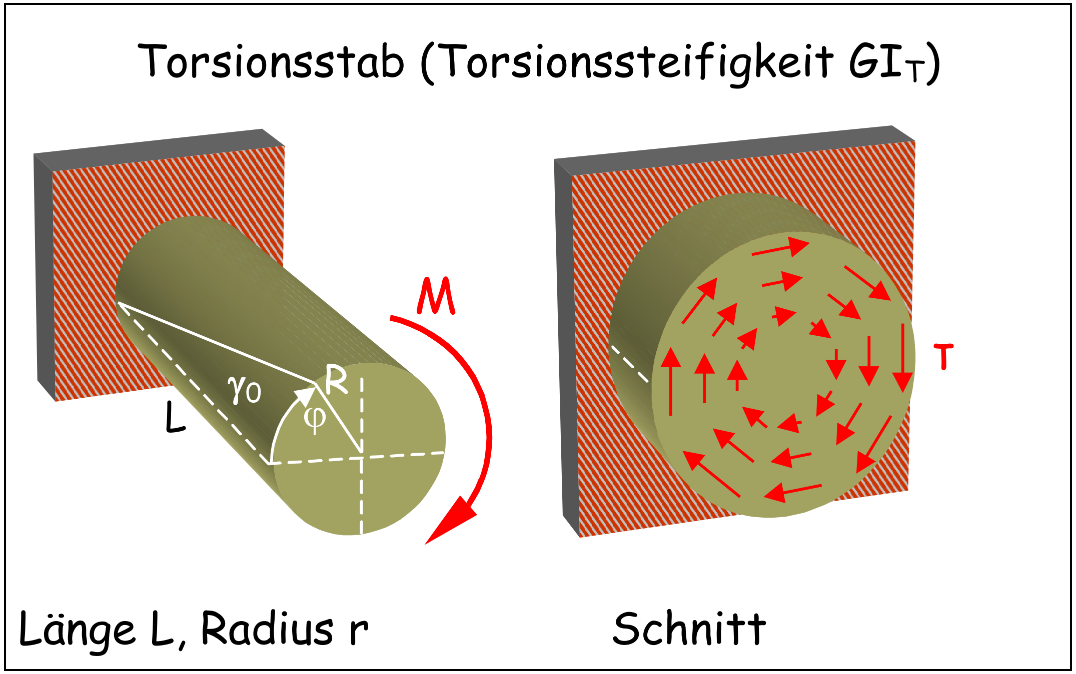
Schnitt



$$w = \frac{L^3}{3EI_a} F + \frac{L^2}{2EI_a} M,$$

$$\varphi = \frac{L^2}{2EI_a} F + \frac{L}{EI_a} M.$$

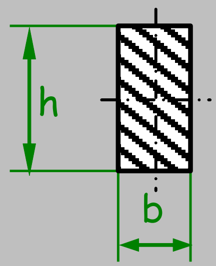
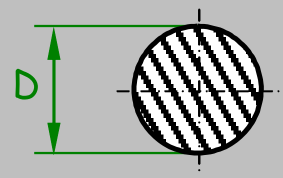
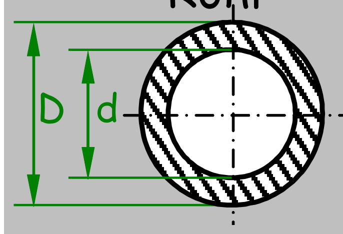
4 Torsion



$$M = \frac{GI_T}{L}\varphi, \quad c = \frac{GI_T}{L}$$

Flächenmomente zweiten Grades [Second moment of area]

(alt: Flächenträgheitsmoment [Moment of inertia])

Rechteck	Vollkreis	Rohr
		

Axiales Flächenmoment zweiten Grades (für Biegung):

Rechteck	Vollkreis	Rohr
$I_a = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I_a = \frac{\pi}{64} D^4$	$I_a = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$

Polares Flächenmoment zweiten Grades (für Torsion):

Rechteck	Vollkreis	Rohr
–	$I_T = I_P = \frac{\pi}{32} D^4$	$I_T = I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

Zum Merken:

- Rechteckquerschnitt hochkant biegen → höhere Steifigkeit
- Röhre bei gleicher Masse vgl. mit Vollstange → höhere Steifigkeit