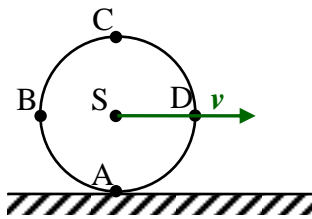


Übung 3: Momentanpol

Teil I: Momentanpol Quiz

1: Rollendes Rad

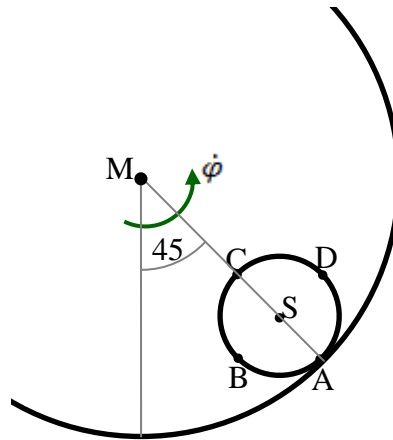
Gegeben sei ein rollendes Rad mit Radius r , das im Schwerpunkt S die konstante horizontale Geschwindigkeit v aufweist und zum gegenwärtigen Zeitpunkt im Punkt A den Boden berührt.



- Wo liegt der Momentanpol?
- Bestimme die Geschwindigkeit (Richtung und Betrag) in den Punkten A, B, C und D zum gegenwärtigen Zeitpunkt.
- Wir nehmen an, dass A zum gegenwärtigen Zeitpunkt im Ursprung liegt. Bestimme die Geschwindigkeit (Richtung und Betrag) für einen beliebigen Punkt (x, y) des Rades.

2: Kugellager

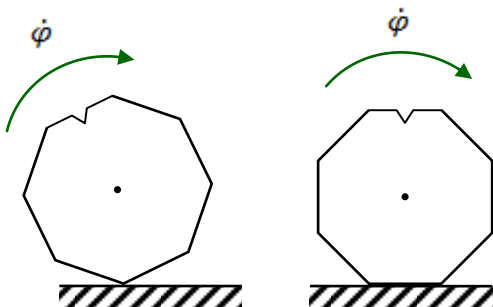
Gegeben sei eine Kugel mit Radius $r = 1 \text{ mm}$, die auf der Innenseite eines Kugellagers mit Radius $R = 5 \text{ mm}$ abrollt. Dabei läuft der Schwerpunkt S mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ um das Lagerzentrum M . Zum gegenwärtigen Zeitpunkt berührt die Kugel im Punkt A die Lagerbahn.



- Berechne die Geschwindigkeit im Punkt S.
- Wo liegt der Momentanpol?
- Bestimme die Geschwindigkeit in den Punkten A, B, C und D zum gegenwärtigen Zeitpunkt.

3: Holpern

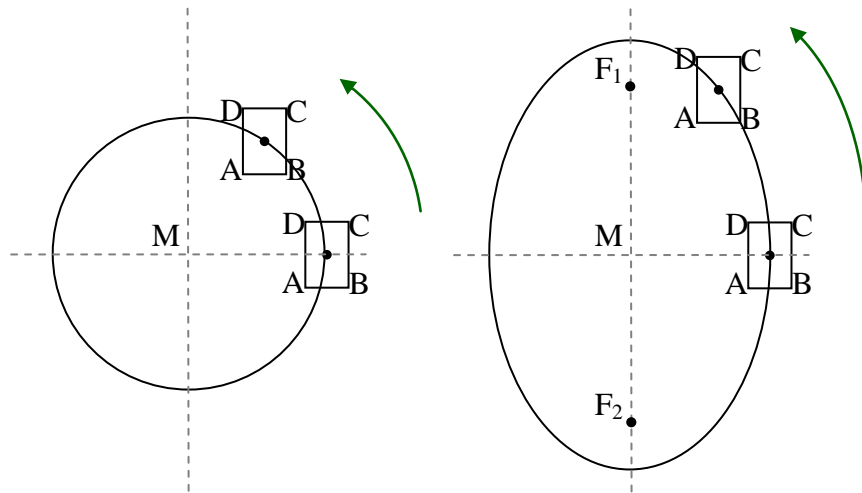
Statt eines Rades betrachten wir nun ein Achteck, das über den Boden „rollt“. Die Kerbe dient der besseren Erkennung der Drehbewegung. Zu beachten ist, dass nun auch der Geschwindigkeitsvektor im Schwerpunkt die Richtung ändert.



- Zeichne den Geschwindigkeitsvektor am Schwerpunkt im ersten Bild und einem weiteren Eckpunkt.
- Wo liegt nun der Momentanpol beim ersten Bild?
- Wo liegt das Problem beim „Übergang“ vom ersten zum Zweiten Bild?
Versuche, an den gleichen Stellen, wieder Geschwindigkeitsvektoren einzutragen.

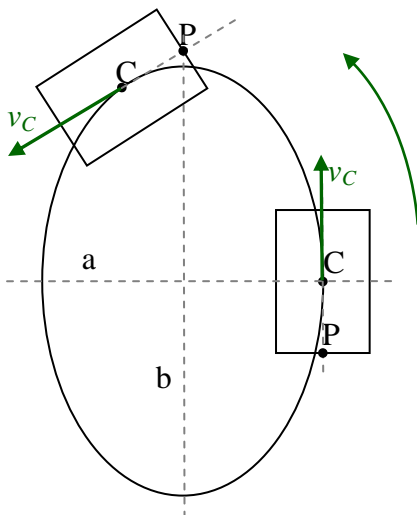
4: Kreis und Ellipsoid

Auf einer Kreis- bzw. Ellipsenbahn bewegt sich ein Rechteck wie in den Bildern angegeben. M gibt jeweils den Mittelpunkt an, F_1 und F_2 bezeichnen die beiden Brennpunkte der Ellipse.



- Wo liegt jeweils der Momentanpol?
- Zeichne dazu jeweils für die Punkte A, B, C und D die Geschwindigkeitsvektoren ein.
- Wo würde bei der Kreisbewegung (linkes Bild) der Momentanpol liegen, wenn sich das Rechteck „mitdrehen“, also „mitkippen“ würde?

Teil II: Programmier- und Rechenaufgabe



5: Bewegung auf Ellipsoid

Wir betrachten nun das Problem des „mitdrehenden“ Rechtecks auf einer Ellipsenbahn. D.h. der Schwerpunkt C des Rechtecks liegt zu jedem Zeitpunkt t auf der Ellipse und ist festgelegt durch die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\varphi(t)) \\ b \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix},$$

wobei $\varphi(t)$ den Winkel zum Zeitpunkt t angibt. Der Abstand von C zum Punkt P ist gegeben durch die Länge l .

- Skizziere eine Vermutung, wie der Momentanpol in diesem Fall verlaufen könnte.
- Gib eine Formel für die Geschwindigkeit am Punkt C an.
- Berechne die Koordinaten des Punktes P zu jedem Zeitpunkt. Tipp: Bestimme dazu den Distanzvektor \overrightarrow{PC} .
- Die Ableitung der Koordinaten des Punktes P nach t ergibt die Geschwindigkeit in P (musst du nicht ausrechnen). Benutze den Programmcode `momentanpol.m` auf der Homepage um den Momentanpol M zu jedem Zeitpunkt zu berechnen. Der Programmcode enthält bereits eine Funktion zur Berechnung der Koordinaten und Geschwindigkeiten von C und P zu jedem Zeitpunkt.

Zusatz, falls noch Zeit ist:

- Formuliere die Bewegung des Punktes C als Differentialgleichung.
- Benutze die Funktion im Programmcode um die Bewegung von C und P mittels Differentialgleichungen zu lösen.