# 1 Minieinführung RB-Methoden

Ziel: Für gegebenes $\mu \in \mathcal{D}$ finde $u(\mu) \in X^{\mathcal{N}}$ (z.B. FE Raum, Basis $\{\varphi_i, ..., \varphi_{\mathcal{N}}\}$) sodass

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in X^{\mathcal{N}}$$

mit der Linearform $f$ und der Bilinearform $a$, die sich affin im Parameter zerlegen lassen zu

$$\begin{aligned} a(w, v; \mu) &= \sum_{q=1}^{Q_a} \Theta_a^q(\mu)\, a^q(w, v) \\ f(v; \mu) &= \sum_{q=1}^{Q_f} \Theta_f^q(\mu)\, f^q(v) \end{aligned}$$

System-Vektoren/Matrizen $F^q \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ und $A^q \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} A_{ij}^q &= a^q(\varphi_j, \varphi_i) \\ F_i^q &= f^q(\varphi_i) \end{aligned}$$

Bestimme Reduzierte Basis $\xi_1, ..., \xi_N \in X^{\mathcal{N}}$, z.B. als Lösung für $N$ verschiedene Parameter oder über POD. Definiere die Matrix $Z = [\xi_1 \ ... \ \xi_N] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}\times N}$ und damit die RB-System-Vektoren/Matrizen $F_{RB}^q \in \mathbb{R}^N$ und $A_{RB}^q \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$\begin{aligned} A_{RB}^q &= Z^T A^q Z \\ F_{RB}^q &= Z^T F^q \end{aligned}$$

Für jeden weiteren Parameter $\mu_{neu} \in \mathcal{D}$, assembliere

$$\begin{aligned} A_{RB}(\mu_{neu}) &= \sum_{q=1}^{Q_a} \Theta_a^q(\mu_{neu}) A_{RB}^q \\ F_{RB}(\mu_{neu}) &= \sum_{q=1}^{Q_f} \Theta_f^q(\mu_{neu}) F_{RB}^q \end{aligned}$$

und löse in $\mathcal{O}(N^3)$

$$A_{RB}(\mu_{neu})\ \underline{u}_{RB}(\mu_{neu}) = F_{RB}(\mu_{neu})$$

Die Approximierte Lösung wäre dann $u_{RB}(\mu_{neu}) = \sum_{i=1}^N \underline{u}_{RB}^i \cdot \xi_i$, könnte man in $\mathcal{O}(N\mathcal{N})$ lösen. Meist interesiert man sich nur! für ein (lineares) Output Funktional $\ell(u(\mu))$. Hat man $\ell(\xi_i)$ bereits (offline) berechnet, ergibt sich $\ell(u_{RB}(\mu_{neu}))$ durch $\sum_{i=1}^N \underline{u}_{RB}^i \cdot \ell(\xi_i)$ in $\mathcal{O}(N)$, also (online) komplett unabhängig von der ursprünglichen Dimension $\mathcal{N}$. Jetzt braucht man (nur) noch Fehlerschätzer.