Kapitel 2

Einfache Ausscheideordnungen

In diesem Kapitel wird eine einfache Ausscheideordnung am Beispiel der Lebensversicherung eingeführt. Wie wir sehen werden, beruht diese auf Sterbewahrscheinlichkeiten, welche wir nun zunächst diskutieren wollen.

2.1 Sterbewahrscheinlichkeiten

Sterbewahrscheinlichkeiten

Da die Leistungen von Lebensversicherungen davon abhängen, ob eine bestimmte Person (oder auch mehrere Personen) am Leben ist oder nicht, handelt es sich hierbei um unsichere Zahlungen. Ihre Bewertung hängt also entscheidend davon ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie eintreten. Deshalb beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit den grundlegenden Wahrscheinlichkeiten in diesem Gebiet, den so genannten *Sterbewahrscheinlichkeiten*.

objektives und subjektives Risiko

moral-hazard-Risiko

Diese Wahrscheinlichkeiten hängen von verschiedenen Umständen ab, wie z. B. Familienstand, Geschlecht, Beruf, Alter (so genanntes *objektives Risiko*), aber auch Gewohnheiten, wie z. B. Raucher/Nichtraucher (so genanntes *subjektives Risiko*[1]). Ein weiterer Einflussfaktor ist das so genannte *moral-hazard-Risiko*. Darunter versteht man Verhaltensänderungen, die vom Bestehen eines Versicherungsvertrages ausgelöst werden können (vom nachlassenden Interesse an der Schadenverhütung bis hin zur betrügerischen Herbeiführung von Versicherungsfällen).

Differenzierung

Während in Deutschland bisher nur Geschlecht und Alter berücksichtigt werden und – seit der Deregulierung – gelegentlich auch der Aspekt Raucher/Nichtraucher[2], erfolgt die Prämienberechnung in den USA zum Teil

[1] Während das objektive Risiko von nachprüfbaren Umständen bestimmt wird, bezeichnet das subjektive Risiko Merkmale, die auf den individuellen menschlichen Eigenschaften beruhen und den Risikoverlauf beeinflussen.

[2] Hierfür gibt es zur aktuellen Sterbetafel DAV 2008T entsprechende Änderungsfaktoren. Diese können von Versicherern verwendet werden, wenn sie spezifische Tarife für Nichtraucher anbieten wollen.

Preferred Lives

nach sehr differenzierten Kriterienkatalogen. Versicherungsnehmer[3], die sich anhand dieser Kriterien als besonders gute Risiken qualifizieren, bezeichnet man als *Preferred Lives*.

Wir berücksichtigen zur Bestimmung der Sterbewahrscheinlichkeiten im Folgenden nur das Alter. Andere Größen wie z. B. das Geschlecht sind diskret. Durch Klassenbildung in der Grundgesamtheit können alle folgenden Überlegungen für jede Klasse getrennt angestellt werden. So werden Sterbewahrscheinlichkeiten in Deutschland für Frauen und Männer getrennt angegeben. Dabei steht x stets für das Alter eines Mannes und y für das Alter einer Frau.

2.1 Definition (versicherungstechnisches Alter)

versicherungstechnisches Alter

Allgemeinen stimmen Geburtstag und Stichtag der Bewertung nicht überein. Dann nimmt man üblicherweise das Alter, das innerhalb von $\pm$ 6 Monaten zum Stichtag erreicht wird (Voraussetzung hierbei ist, dass der Stichtag „zwischen den Monaten" liegt, d. h. am Monatsanfang oder -ende). Dies bezeichnet man als das *versicherungstechnische Alter*.

2.2 Beispiel

Am Stichtag 31. 12. 2017 haben alle das (versicherungstechnische) Alter 46, deren 46. Geburtstag zwischen dem 01. 07. 2017 und dem 30. 06. 2018 liegt, die also zwischen dem 01. 07. 1971 und dem 30. 06. 1972 geboren sind. Dies gilt also z. B. für Harry Anwärter in unserem Grundbeispiel (vgl. S. 28).

2.3 Definition

Mit X bezeichnen wir stets das Alter bei Tod. Dabei setzen wir voraus, dass X eine Zufallsvariable mit Werten ≥ 0 ist.

2.4 Definition $(x\,,\ u\,,\ t \geq 0)$[4]

Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x$

Die Größe ${}_tp_x = \mathbb{P}(X > x+t|X > x)$ heißt Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen für die nächsten t Jahre oder *t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit*.

Sterbewahrscheinlichkeit ${}_tq_x$

Die Größe ${}_tq_x = \mathbb{P}(x < X \leq x + t \mid X > x)$ heißt Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen für die nächsten t Jahre oder *t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit*.

[3] Hier und im Folgenden werden wir nicht zwischen Versicherungsnehmer, versicherter Person, Beitragszahler oder Begünstigten unterscheiden, sondern stets nur von Versicherungsnehmern sprechen.

[4] Hinweise zu den international üblichen Bezeichnungen der Versicherungsmathematik finden sich in Anlage B

Die Größe ${}_{t|u}q_x = \mathbb{P}(x+t < X \leq x+t+u | X > x)$ heißt *um t Jahre aufgeschobene u-jährige Sterbewahrscheinlichkeit.*

aufgeschobene Sterbewahrscheinlichkeit ${}_{t|u}q_x$

Es handelt sich hierbei um bedingte Wahrscheinlichkeiten, und wir setzen immer voraus, dass $\mathbb{P}(X > x) > 0$ gilt. Dies ist natürlich sinnvoll, da andernfalls die betrachtete Person mit Sicherheit bereits gestorben wäre.

Für die Berechnung dieser Größen bedienen wir uns der Verteilungsfunktion $F(x)$ von X mit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Für diese Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt:

$$F(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \quad F \text{ ist monoton wachsend.}$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion und der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten[5] ergibt sich für die grundlegenden Wahrscheinlichkeiten aus Definition 2.4:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{\mathbb{P}(X > x+t)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{1-\mathbb{P}(X \leq x+t)}{1-\mathbb{P}(X \leq x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} \\
{}_tq_x &= \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x+t)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\mathbb{P}(X \leq x+t)-\mathbb{P}(X \leq x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} \\
{}_{t|u}q_x &= \frac{\mathbb{P}(x+t < X \leq x+t+u)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{F(x+t+u)-F(x+t)}{1-F(x)}
\end{aligned}$$

2.5 Beispiel

Für $F(x) = \dfrac{x}{\omega_0}$ mit $\omega_0 > 0$, $0 \leq x \leq \omega_0$ ergibt sich:

$${}_tp_x = \frac{\omega_0 - x - t}{\omega_0 - x}\,, \quad {}_tq_x = \frac{t}{\omega_0 - x}\,, \quad {}_{t|u}q_x = \frac{u}{\omega_0 - x}\,.$$

[5] Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$, falls $\mathbb{P}(B) > 0$.

Sterbegesetz

Man bezeichnet eine derartige Verteilungsfunktion $F(x)$ oft als *Sterbegesetz*. Solche Sterbegesetze wurden in der Lebensversicherungmathematik zur Kalkulation verwendet, solange es noch keine Taschenrechner bzw. Computer gab. Heute werden diese Funktionen noch bei der Konstruktion von Sterbetafeln verwendet. Das obige Beispiel verwendet das Sterbegesetz von de Moivre aus dem Jahr 1729. Weitere bekannte Sterbegesetze stammen von Gompertz, Makeham und Weibull.

2.6 Lemma (Zusammenhänge zwischen ${}_tp_x, {}_tq_x, {}_{t|u}q_x$)

(i) ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$

(ii) ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$

Beweis:

(i) Es ist
$$ {}_tp_x + {}_tq_x = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} + \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} = 1 \, . $$

(ii) Es gilt
$$ \begin{aligned} {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} &= \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} \cdot \frac{F(x+u+t)-F(x+t)}{1-F(x+t)} \\ &= \frac{F(x+u+t)-F(x+t)}{1-F(x)} \quad = \quad {}_{t|u}q_x \, , \end{aligned} $$

woraus die erste Gleichung folgt, und
$$ \begin{aligned} {}_tp_x - {}_{t+u}p_x &= \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} - \frac{1-F(x+t+u)}{1-F(x)} \\ &= \frac{F(x+t+u)-F(x+t)}{1-F(x)} \quad = \quad {}_{t|u}q_x \, , \end{aligned} $$

was die zweite Gleichung impliziert. Die dritte Gleichung folgt schließlich aus
$$ {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = (1 - {}_{t+u}p_x) - (1 - {}_tp_x) = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \, . $$

□

Insbesondere können aus ${}_tp_x$ bzw. ${}_tq_x$ allein alle anderen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

2.7 Lemma (Funktionalgleichungen für ${}_tp_x$ und ${}_tq_x$)

Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt:

(i) ${}_tp_x = {}_sp_x \cdot {}_{t-s}p_{x+s}$

(ii) ${}_tq_x = {}_sq_x + {}_sp_x \cdot {}_{t-s}q_{x+s}$

Beweis:

(i) Es ist

$$ {}_sp_x \cdot {}_{t-s}p_{x+s} = \frac{1-F(x+s)}{1-F(x)} \cdot \frac{1-F(x+s+t-s)}{1-F(x+s)} = {}_tp_x \ . $$

(ii)

$$ \begin{aligned} {}_tq_x &= \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} = \frac{F(x+s)-F(x)}{1-F(x)} + \frac{F(x+t)-F(x+s)}{1-F(x)} \\ &= {}_sq_x + {}_{s|t-s}q_x = {}_sq_x + {}_sp_x \cdot {}_{t-s}q_{x+s} \end{aligned} $$

□

Häufig taucht die Größe $\mathbb{P}(X > x)$ auf. Diese Funktion heißt *Erlebensfunktion* $s(x)$. Sie hängt mit $F(x)$ über

Erlebensfunktion $s(x)$

$$ s(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) $$

zusammen. Somit gilt insbesondere

$$ s(0) = 1\ , \quad \lim_{x\to\infty} s(x) = 0\ , \quad s \text{ fallend und stetig.} $$

2.8 Beispiel (de Moivre)

$$ F(x) = \frac{x}{\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega_0} $$

2.9 Bemerkung

Mit Hilfe der Erlebensfunktion können folglich ebenfalls alle Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{s(x+t)}{s(x)}\ , \\ {}_tq_x &= \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}\ , \\ {}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)}\ . \end{aligned} $$

Aus der Formel für ${}_tp_x$ und aus $s(0) = 1$ folgt mit $x := 0$ und $t := x$

$$ s(x) = {}_xp_0\ . $$

2.10 Übungsaufgabe

(i) Die Sterblichkeit für ein erhöhtes Risiko soll für ein festes Zeitintervall $[0, T]$ durch eine konstante, multiplikative Sterblichkeitserhöhung beschrieben werden:

$$ {}_t\overline{q}_x = (1+r)_t q_x \quad (\text{mit festem } x,\ r \geq 0 \text{ und } (1+r)_T q_x \leq 1) $$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$ {}_t\overline{p}_x = (1+r)_t p_x - r\ . $$

(ii) Wie hängen ${}_t\overline{q}_x$ und ${}_t q_x$ zusammen, wenn wir stattdessen eine konstante, multiplikative Verminderung der Überlebenswahrscheinlichkeit vornehmen?

$$ {}_t\overline{p}_x = (1-s)_t p_x \quad (\text{mit } x > 0,\ t > 0,\ 0 < s < 1) $$

Im nächsten Abschnitt wenden wir uns nun der Frage zu, wie man realistische Funktionen bestimmt.

2.2 Sterbetafeln

Um (realistische) Funktionen $F(x)$ bzw. $s(x)$ zu erhalten, wurden früher Sterbegesetze betrachtet. Heute bestimmt man diese durch Angabe einzelner Werte (z. B. aus Beobachtungen) in so genannten *Sterbetafeln*, die oft auch als *Ausscheideordnungen* bezeichnet werden. Zwischenwerte werden dann durch Interpolation ermittelt. Oft wird $s(x)$ als zu Grunde liegende Funktion benutzt, oder genauer $l_0 s(x) = l(x) = l_x$ mit geeigneter Skalierung l_0 [6].

Ausscheideordnungen

Interpretation von l_x

Um die Größe $l(x) = l_x$ zu interpretieren, betrachten wir einen Bestand von l_0 Neugeborenen. Sei $L(x)$ die Anzahl von ihnen, die bis zum Alter x überlebt. Dann ist $L(x)$ eine binomial-verteilte Zufallsvariable mit der Verteilung $Bin(n,p)$ und den Parametern $n = l_0$ sowie $p = {}_x p_0 = s(x)$.[7]

Für den Erwartungswert von $L(x)$ gilt folglich

$$ \mathbb{E}\left(L(x)\right) = l_o s(x) = l_x\ , $$

d. h. wir können erwarten, dass von den l_0 Neugeborenen l_x bis zum Alter x überleben.

deterministisches Modell

Die Ausscheideordnung liefert also ein *deterministisches Modell* zur Be-

[6] Oft $l_0 = 100\,000$ oder $l_0 = 1\,000\,000$.

[7] Sei $X \sim Bin(n,p)$, dann ist $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k = 0,1,2,\ldots,n$. Zudem gilt $\mathbb{E}(X) = np$ und $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

schreibung des Abbaus einer geschlossenen Personengesamtheit. Da hier nur die Ausscheideursache Tod betrachtet wird, spricht man von einer *einfachen Ausscheideordnung*. Bei mehreren Ausscheideursachen (z. B. Tod und Berufsunfähigkeit) spricht man von *zusammengesetzten Ausscheideordnungen* (siehe Kapitel 5).

einfache Ausscheideordnung

zusammengesetzte Ausscheideordnung

Diese Ausscheideordnung können wir zur Berechnung unserer grundlegenden Wahrscheinlichkeiten wie folgt verwenden:

Es ist $s(x) = \dfrac{l_x}{l_0}$. Daraus folgt mit Hilfe der oben ausgeführten Formeln

Formeln mit l_x

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{l_0}{l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \,, \\
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_td_x}{l_x} \,, \quad \text{mit } {}_td_x := l_x - l_{x+t} \\
{}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x} = \frac{{}_ud_{x+t}}{l_x} \,.
\end{aligned}$$

Zur *Interpretation von* ${}_td_x$ betrachten wir

Interpretation von ${}_td_x$

$$ {}_td_x = l_x - l_{x+t} = E\left(L(x)\right) - E\left(L(x+t)\right) = E\left(L(x) - L(x+t)\right) \,. $$

Somit ist ${}_td_x$ also die erwartete Anzahl von Mitgliedern der Gruppe von l_0 Neugeborenen, die im Alter zwischen x und $x+t$ sterben.

Bezeichnungen

Es sei ${}_1q_x = q_x$, ${}_1p_x = p_x$, ${}_1d_x = d_x$, also ist z. B. q_x die Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, innerhalb eines Jahres zu sterben.

2.11 Bemerkung

(i) Üblicherweise wird in *Sterbetafeln* das Alter x ganzzahlig gewählt: $x = 0{,}1{,}2,\ldots$ Jahre. In Anlage D sind Sterbetafeln für Männer und Frauen in Deutschland angegeben. Die Abbildung 2.1 auf der nächsten Seite stellt die Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel DAV 2008T für Männer und Frauen graphisch dar; Abbildung 2.2 auf Seite 55 zeigt eine Sterbetafel der USA, bei der im ersten Lebensjahr auch unterjährige Werte angegeben sind, um die Sterblichkeit in diesem Alter besser approximieren zu können.

Sterbetafeln

(ii) Da Kalkulationen bei Versicherungen grundsätzlich vorsichtig erfolgen, enthalten Sterbetafeln i. Allg. *Sicherheitszuschläge*. Dabei kommt es darauf an, ob die Tafel für Versicherungen benutzt wird, die ein Todesfallrisiko abdecken (dafür gibt es in Deutschland z. B. die Sterbetafel DAV 2008T (siehe Anlage D.1 und D.2)) oder aber

Sicherheitszuschläge

ein Erlebensfallrisiko (z. B. die Rententafel DAV 2004R (siehe Anlage D.3, D.4 und D.5)). Beide Tafeln existieren getrennt für Frauen und Männer.

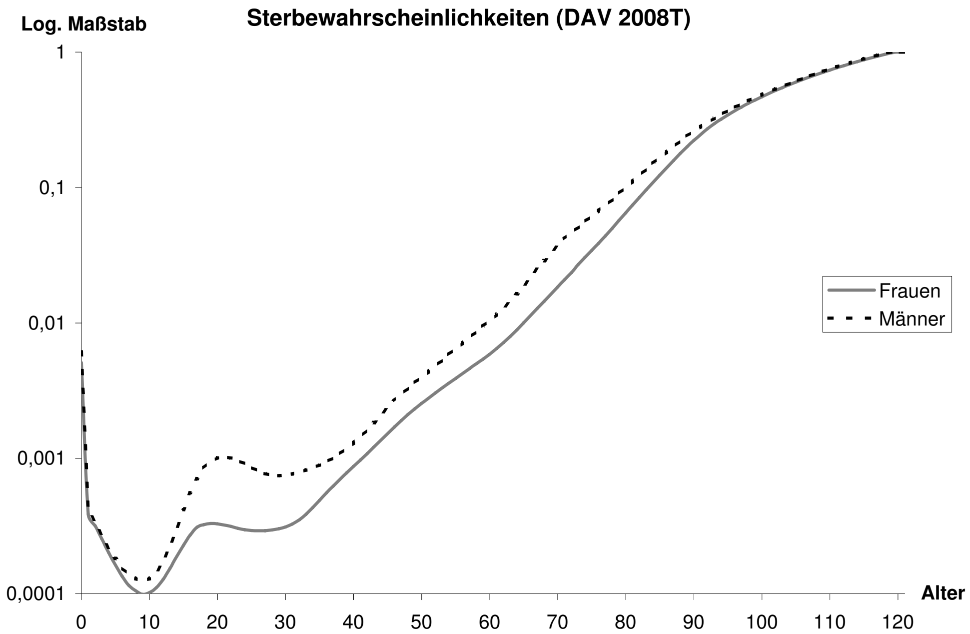

Abbildung 2.1: Sterbewahrscheinlichkeiten Sterbetafel DAV 2008T.

2.12 Bemerkung

(i) Bei der Abdeckung von *Erlebensfall-Risiken* ergibt sich eine besondere Schwierigkeit dadurch, dass sich die Lebenserwartung bedingt durch den medizinischen Fortschritt ständig erhöht (vgl. Abbildung 2.3 auf Seite 56). Dies muss bei der Abschätzung künftiger Sterbewahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Hierfür werden häufig sogenannte *Generationentafeln* verwendet. Als Beispiel betrachten wir die Sterbetafel DAV 2004R, die für Rentenversicherungen angewendet wird (siehe Anlage D.3 bzw. D.4). Sie enthält die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^{1965} eines 1965 Geborenen (*Grundtafel*) im Jahr $1965 + x$. Für höhere Alter x beinhaltet dies eine Schätzung, wie sich die Sterblichkeit in Zukunft verbessern wird. Damit ist diese Sterbetafel aber nur für den Geburtsjahrgang 1965 anwendbar, man spricht hierbei von einer Generation oder *Kohorte*.

Generationentafeln

Grundtafel

Kohorte

Soll sie auf einen Versicherungsnehmer mit Geburtsjahr τ und Alter x angewendet werden, so wird seine Sterbewahrscheinlichkeit q_x^τ durch die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{x+\overline{h}(\tau)}^{1965}$ der Grundtafel approximiert, d. h. sein Alter wird verschoben (*Altersverschiebung* nach Rueff). Die Werte $\overline{h}(\tau)$ für verschiedene τ finden sich in Anlage D.5, z. B. ergibt sich q_{35}^{1974} mit der Altersverschiebung $\overline{h}(1975) = -3$ aus der Grundtafel als $q_{32}^{1965} = 0{,}000626$.

Altersverschiebung