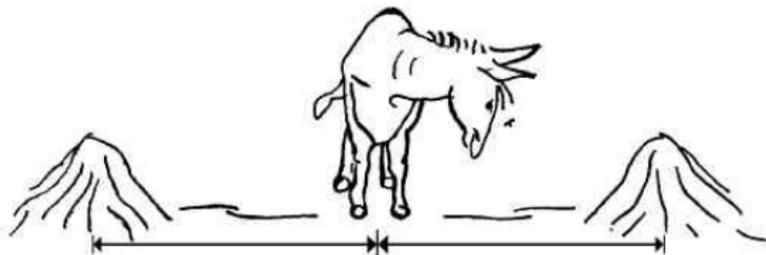


Warum Buridans Esel nicht verhungert – Gesetz und Zufall in der Physik

Prof. Dr. Peter C. Hägele, Universität Ulm
peter.haegele@uni-ulm.de
www.uni-ulm.de/~phaegele/

HSZ und Studium generale 31.01.2007



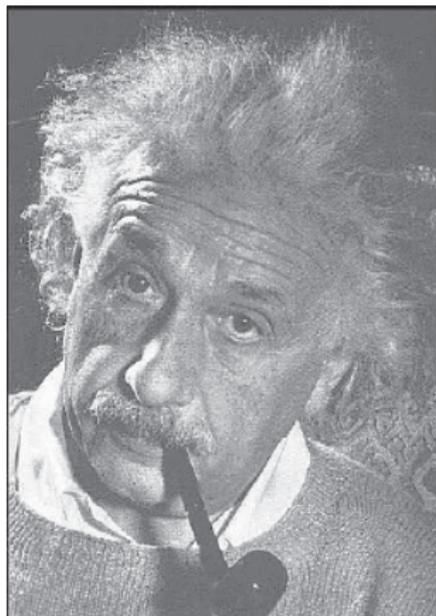
Teil I

Referat

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

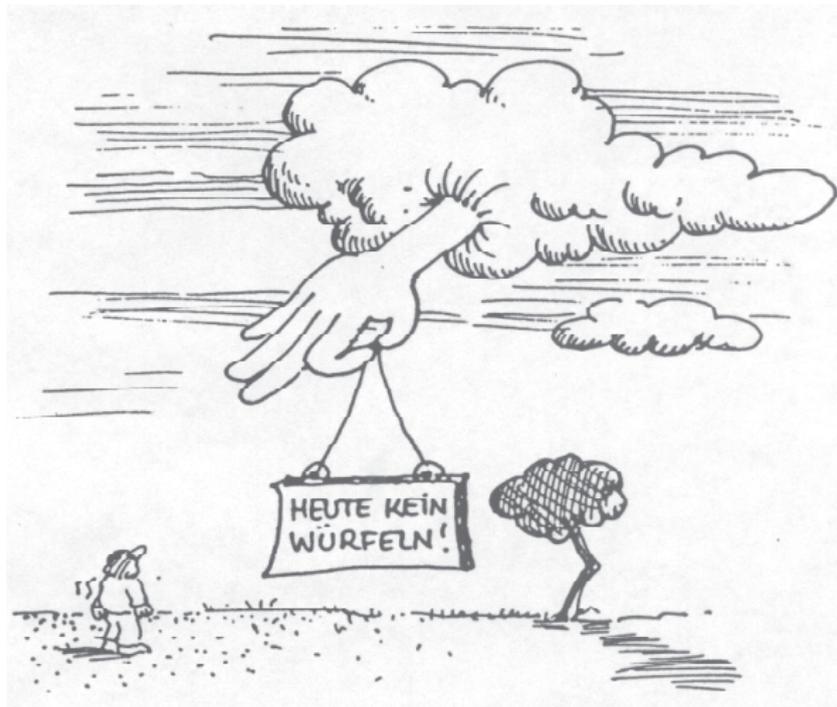
„Gott würfeln nicht.“



A. EINSTEIN an M. BORN
(1926):

*„Die Theorie liefert viel, aber
dem Geheimnis des Alten bringt
sie uns nicht näher. Jedenfalls
bin ich überzeugt, dass der nicht
würfelt.“*

Doch kein Würfeln?



- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

Ursache und Wirkung

Beschreibung von Naturvorgängen:

ARISTOTELES: causa materialis, causa formalis, causa finalis, causa efficiens

neuzeitliche Naturwissenschaft: nur causa efficiens (Wirkursache)

Kausalgesetz: Alles was geschieht hat eine Ursache.

Ursache —(regelmäßiger Zusammenhang)—> Wirkung

Unterscheidung (MAXWELL, BORN):

schwach: **Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen.**
gilt immer (?)

stark: **Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen.**
gilt nicht immer!

Ursache und Wirkung

HUME: Bezweifelt logische Notwendigkeit des Kausalgesetzes

KANT: ja, kein analytischer Satz; synthetischer Satz a priori

Bedingung für die Möglichkeit von Erkenntnis von individuellen
Gegenständen

Gesetze der klassische Physik:

Kausalität „eingebaut“ durch bestimmten Typ von Differentialgleichung
(Anfangswertproblem)

Das Kausalgesetz schränkt ggf. ein:

- bestimmte Lösungen
(z.B. nur retardierte Potentiale der Feldtheorie)
- Wirkungen nur *im* Lichtkegel (Relativitätstheorie)
- Form der KRAMERS-KRONIG-Relationen

Wenn . . . , dann . . .

Determinismus:

Physikalische Zustände lassen sich vollständig messen und eindeutig vorausberechnen.

vgl. Kausalgesetz:

Ist der Zustand eines abgeschlossenen Systems in einem Zeitpunkt vollständig bekannt, so kann man den Zustand in jedem früheren oder späteren Zeitpunkt grundsätzlich berechnen.

(v. WEIZSÄCKER: Zum Weltbild der Physik. 11. Aufl. Stuttgart: Hirzel 1970)

Anfangsbedingungen und Gesetze

Struktur einer naturwissenschaftlichen Erklärung:

Wenn A, dann folgt immer B.

Anfangsbedingungen + Gesetze \Rightarrow determiniertes Ereignis

(HEMPEL-OPPENHEIM-Schema, 1948)

(„deduktiv-nomologisches Modell“)

Anfangsbedingungen und Gesetze



Roger Federer

Anfangsbedingungen und Gesetze



Anfangsbedingungen: Ort und Impuls des Balls
Gesetze: Schwerkraft, Strömungsgesetze der Luft

Triumphe der klassischen Physik



HALLEY'scher Komet

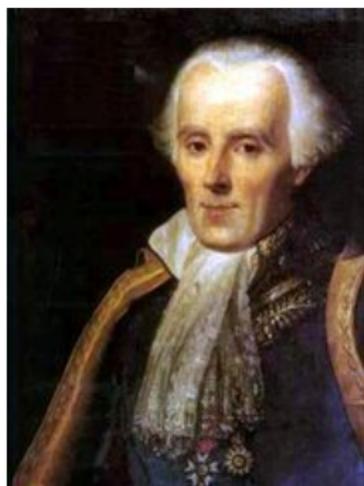
HALLEY (1656 –1742) identifizierte einen Kometen in den Jahren 1531, 1607 und 1682 als denselben. Korrekte Wiederkehrvoraussage für 1759.



Entdeckung des Planeten Neptun

durch GALLE (1846)
Positionsberechnungen aus Störungen der Umlaufbahn des Uranus (LE VERRIER, ADAMS)

Der LAPLACE'sche Dämon (1776, 1814)



Pierre S. de Laplace
(1749 - 1827)

„Wir müssen [. . .] den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden betrachten. Eine Intelligenz, die für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte, sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennt, und überdies umfassend genug wäre, um die gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, werde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts wäre für sie ungewiss und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.“

Weltanschauliche Folgerungen

Klassische Physik:

Alle Vorgänge laufen determiniert ab.

Die Welt – eine Maschine?

„L’homme machine“

(DE LA METTRIE)

Willensfreiheit?

Gott – arbeitslos?

Gott – wohnungslos?



- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

Ignoranzinterpretation

Pierre S. de Laplace:

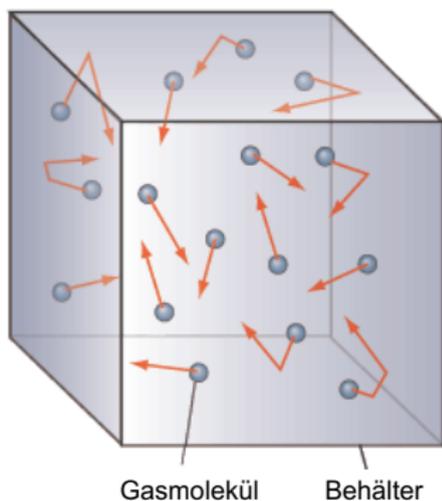
„Die von einem einfachen Luft- oder Gasmolekül beschriebene Kurve ist in eben so sicherer Weise geregelt wie die Planeten- bahnen: es besteht zwischen beiden nur der Unterschied, der durch unsere Unwissenheit bewirkt wird.“

Laplace 1814: Philosoph. Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Leipzig 1932, S. 3

Charakteristisch:

Alles läuft deterministisch ab, aber wir wissen die Details nicht (sog. Ignoranzinterpretation); nur „epistemischer“ Zufall.

Beispiel: Kinetische Gastheorie



Verzicht auf Detailkenntnisse
(Problem zu komplex)

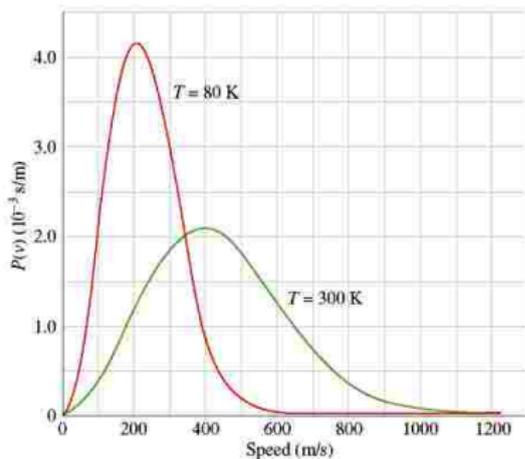
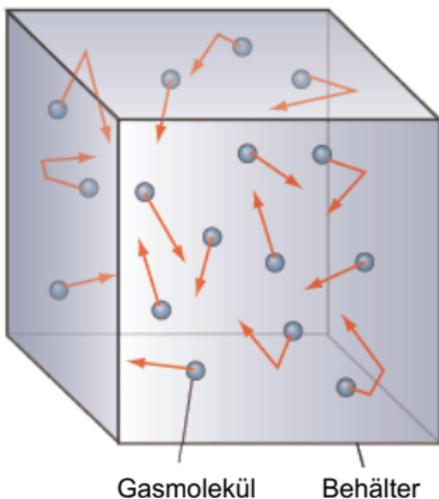
Mittelwerte:

$$p = \frac{1}{3} n m \overline{u^2}$$

$$\frac{f}{2} RT = \overline{E}$$

„Im Prinzip“ sind alle Bahnen
determiniert!

Beispiel: Kinetische Gastheorie



Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten als Maß der Zufälligkeit:

- Symmetrieanahmen (a priori) (Würfel, Münze)
- Messung relativer Häufigkeiten (a posteriori):
 s_n Zahl der Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit p ; n Gesamtzahl

relative Häufigkeit $\frac{s_n}{n}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = p$ (R. v. MISES)

ungeeignet für mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie!

axiomatische Theorie: $\{\Omega, \Sigma, p\}$ (KOLMOGOROFF)

- kombinatorische Berechnung; statistische Theorien

Gesetze des Zufalls?

zufälliges Einzelereignis: nicht vorhersagbar

viele zufällige Ereignisse: relative Häufigkeiten vorhersagbar!



BERNOULLI'sches Gesetz der großen Zahlen
(beweisbar):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$(\varepsilon > 0)$

Experiment:

GALTON-Brett

F. GALTON (1822 – 1911)

So funktioniert klassische statistische Physik

„Gleichgewichts-Thermodynamik“
(MAXWELL, GIBBS, BOLTZMANN)

Zwei Beschreibungsebenen (Makro- und Mikrobeschreibung):

Makrozustand: makroskopische Messgrößen (Druck, Temperatur, Volumen, Verteilungsfunktion)

Mikrozustand: detailliertere Beschreibung des Makrozustands durch Angabe von Ort und Impuls jedes Teilchens
(später: „Quantenzustände des Systems“)

Verknüpfung: Die K Mikrozustände ergeben denselben Makrozustand. (Warum eigentlich?)
Entropie $S = k_B \ln K$ (BOLTZMANN)

So funktioniert klassische statistische Physik

„Gleichgewichts-Thermodynamik“
(MAXWELL, GIBBS, BOLTZMANN)

Grundlegende Annahme (Postulat):

Alle erreichbaren Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems sind gleichwahrscheinlich.

Ist Symmetrieannahme! (vgl. Würfel)

erreichbar: verträglich mit den physikalischen Parametern
 des Systems

abgeschlossen: Energie, Teilchenzahl, Volumen, äußere Para-
 meter (Felder) konstant

Oft Umrechnung auf System mit konstanter Temperatur

⇒ Boltzmann-Statistik

Beispiel: Spiel mit mehreren Würfeln



Mikrozustand : einzelne Augenzahlen (hier: 3 2 6 3 5 6)

Makrozustand Summe der Augenzahlen (hier: 25)

Drei Würfel: Mikro- und Makrozustände

								631	641														
								622	632														
								621	613	623	651												
								612	541	614	642												
								531	532	551	633												
								522	523	542	624												
								611	513	514	533	615	661										
								521	441	451	524	561	652										
								512	432	442	515	552	643										
								431	423	433	461	543	634										
								422	414	424	452	534	625										
								413	351	415	443	525	616										
								511	341	342	361	434	516	562	662								
								421	332	333	352	425	462	553	653								
								412	323	324	343	416	453	544	644								
								331	314	315	334	362	444	535	635								
								322	251	261	325	353	435	526	626								
								411	313	242	252	316	344	426	463	563	663						
								321	241	233	243	262	335	363	454	554	654						
								312	232	224	234	253	326	354	445	545	645						
								231	223	215	225	244	263	345	436	536	636						
								311	222	214	161	216	235	254	336	346	464	564	664				
								221	213	151	152	162	226	245	264	355	455	555	655				
								212	141	142	143	153	163	236	255	346	446	546	646				
								211	131	132	133	134	144	154	164	246	265	365	465	565	665		
								121	122	123	124	125	135	145	155	165	256	356	456	556	656		
								111	112	113	114	115	116	126	136	146	156	166	266	366	466	566	666
								3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 **Zufall in der klassischen Physik**
 - Kinetische Gastheorie
 - **Deterministisches Chaos**
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

Ahnungen von chaotischem Systemverhalten

MAXWELL erwog schon 1877, dass

“a small initial variation may produce a very great change in the final state of the system”.

POINCARÉ (1908):

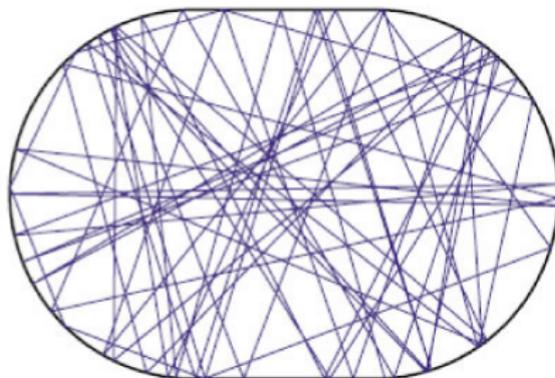
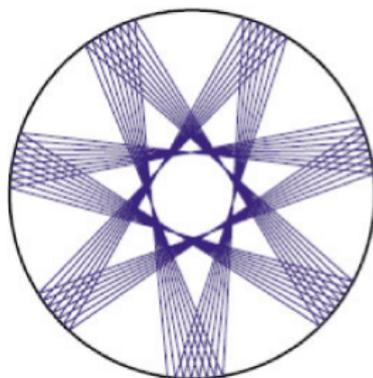
„[...] es kann der Fall eintreten, daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen; ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum für die letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine ‘zufällige Erscheinung’.“

[...] „Diese Dinge sind so bizarr, daß ich es nicht aushalte, weiter darüber nachzudenken.“

Überall Chaos?

Beispiele:

- Würfel: „gleiches“ Würfeln ergibt zufällige Augenzahlen
- Lottomaschine im Fernsehen
- Stadion-Billard



Überall Chaos?

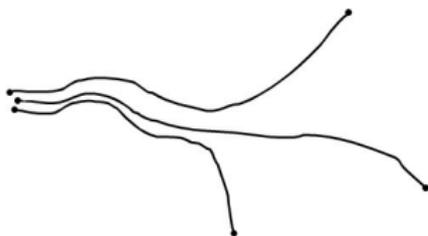
Weitere Beispiele:

- Pendel mit großer Amplitude (→ Experiment)
- reales Billard mit Zuschauern (ohne Reibung):
Vorhersage nach dem 9. Stoß wegen des Gravitationseinflusses der Zuschauer nicht mehr möglich
- Planetensystem ??
- Bahn eines O_2 -Moleküls nach dem 54. Stoß wegen beliebigem Elektron am Rande des Weltalls nicht mehr vorhersagbar
- laminare/turbulente Strömung (Zigarettenrauch, Wetter)

Determinismus \neq Vorhersagbarkeit

Charakteristika chaotischer Systeme:

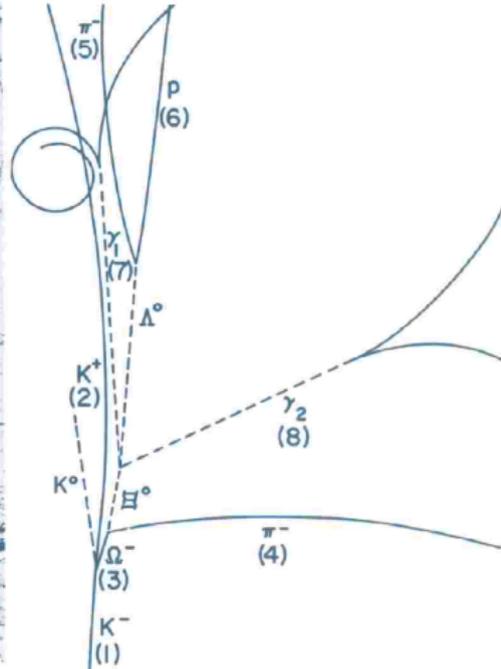
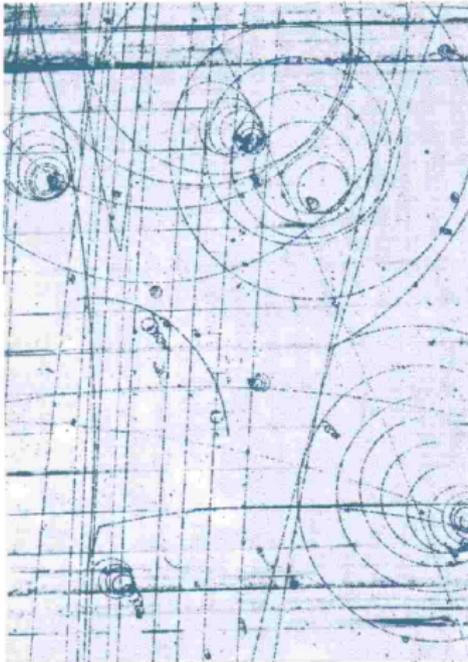
- Verletzung des starken Kausalprinzips
Ähnliche Ursachen haben eben nicht immer ähnliche Wirkungen!
- sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen



- Nicht-Separabilität
- langfristiges Verhalten nicht vorhersagbar, insofern *zufällig*
- Determinismus bedeutet nicht zwingend Vorhersagbarkeit
- oft reguläre und irreguläre Abläufe verschachtelt

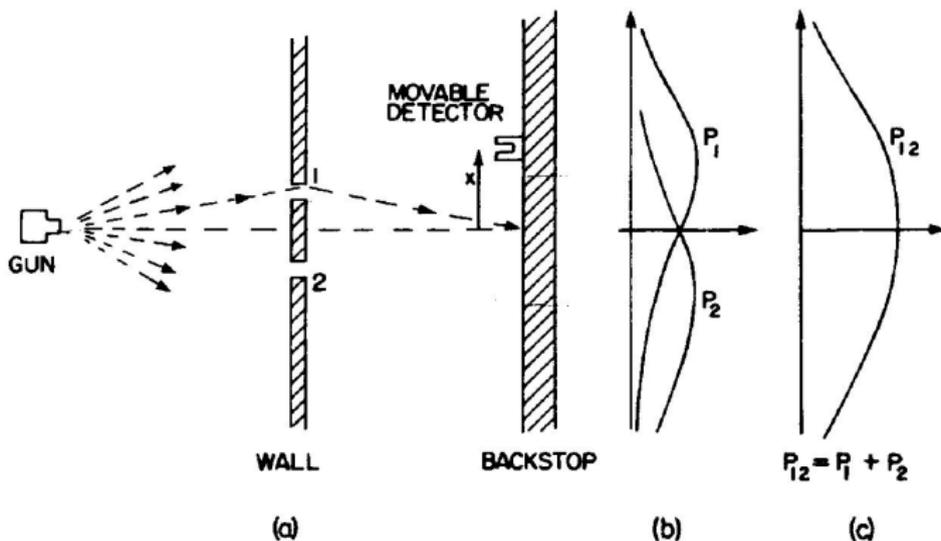
- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

Zufallsgeschehen bei Elementarteilchen

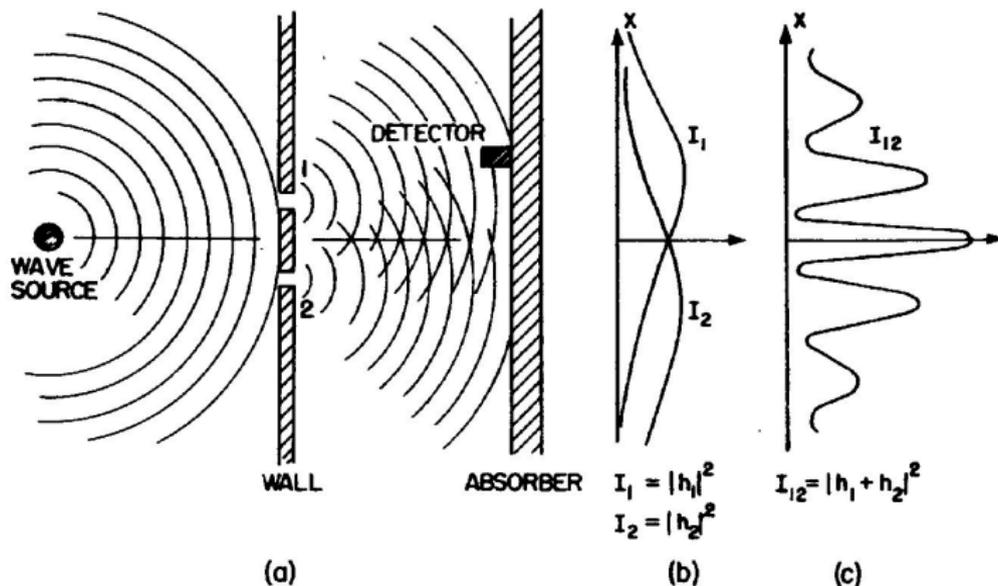


- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 **Zufall in der Quantenphysik**
 - **Indeterminismus am Doppelspalt**
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

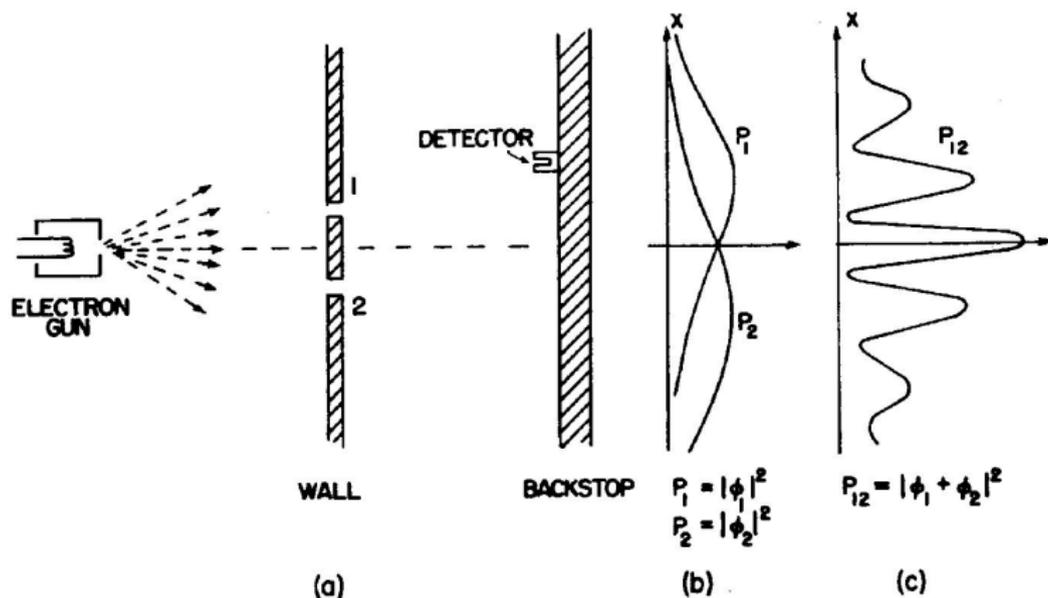
Klassische Teilchen durch einen Doppelspalt



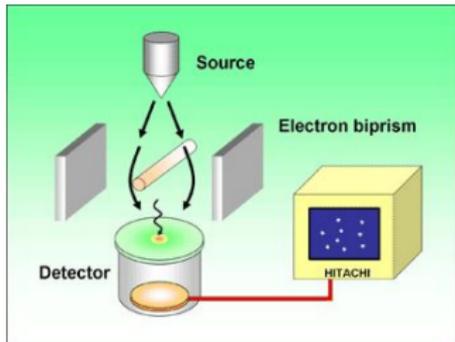
Wellen durch einen Doppelspalt



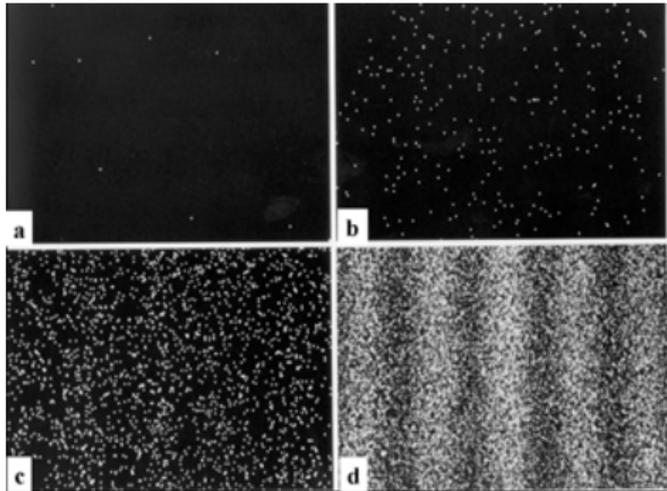
Quantenobjekte (Elektronen) durch einen Doppelspalt



Einzelne Elektronen durch einen Doppelspalt



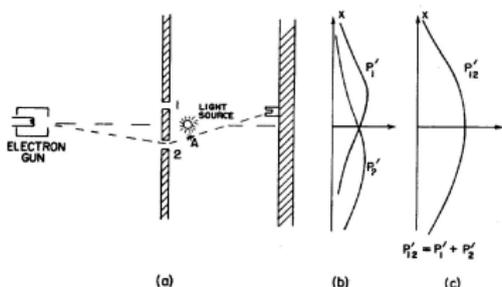
(Tomonura et al. (1989))



└ Zufall in der Quantenphysik

└ Indeterminismus am Doppelspalt

Wo gehen die Elektronen durch?



Annahme: (da „ganze“ Elektronen ankommen)

Jedes Elektron geht *entweder* durch Öffnung 1
oder durch Öffnung 2.

(tertium non datur)

Ignoranzinterpret.: Jedes Elektron *hat* Ort, der aber unbekannt ist.

Folgerung:

Elektronen in 2 Klassen einteilbar, $P = P_1 + P_2$

Widerspruch zum Experiment!!

Ignoranzinterpretation *nicht* möglich!

FEYNMAN Lectures . . .



“Yes! That is the way electrons go.”

R. FEYNMAN
(1918 – 1988)

Der nicht-klassische Skiläufer



Doppelspaltexperiment mit Fullerenen (C₆₀)

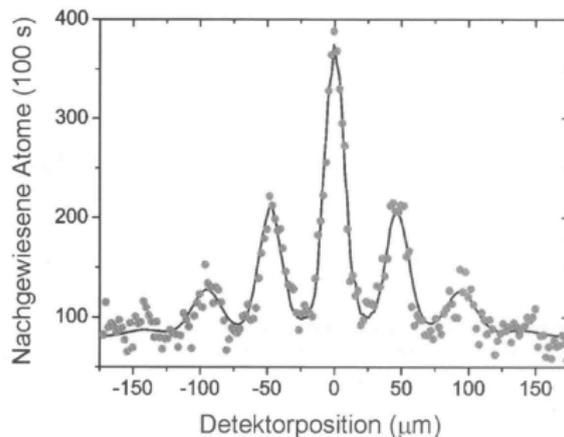
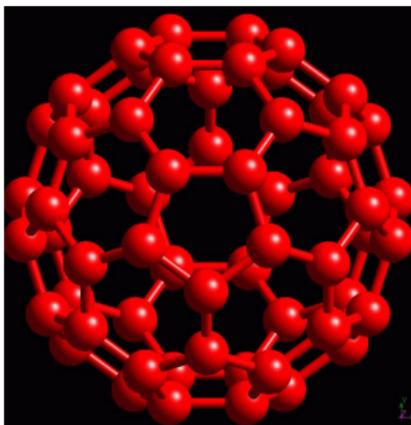


Abb. 7.6: Beugungsbild von C₆₀-Molekülen an einem Gitter

(ZEILINGER et al. (1999))

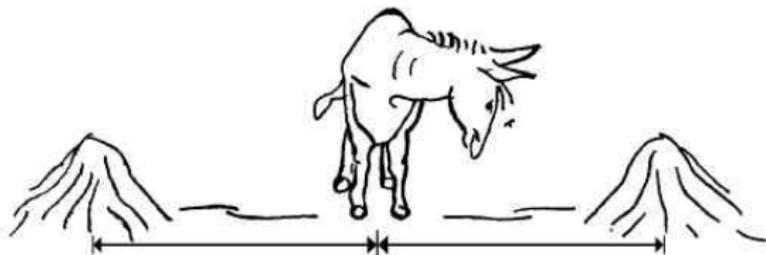
Ist die Quantenmechanik akausal?

(Schwache) Kausalität: Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkung.
In der Quantenmechanik ist vollständige Kenntnis der Ursachen
prinzipiell nicht möglich.
Das Kausalprinzip wird dadurch nicht falsch, sondern *unanwendbar*.

Besser: **Indeterminismus** der Quantenmechanik

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - **Buridans Esel**
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

Die Unbestimmtheitsrelation rettet Buridans Esel

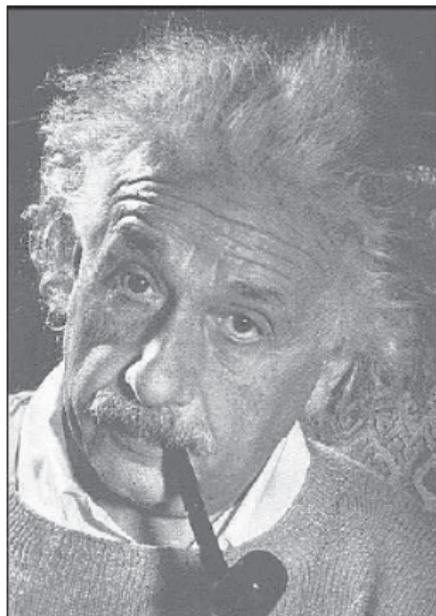


Des Buridanus Eselstute / kennt jeder Böse, jeder Gute.
Und jeder, Mann wie Mädchen, weiß,
daß sie, vom Wirbel bis zum Steiß
verhungert ist, weil kurzerhand
sie sich nicht hat entschließen können,
von den beiden Bündeln Heu,
in deren Mitte sie sich fand,
das eine sich zur Speis / zu gönnen vorzugsweis [...]

(CHRISTIAN MORGENSTERN: Galgenlieder nebst anderem)

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - **Die BOHM'sche Deutung**
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

„Gott würfelt nicht.“



A. EINSTEIN an M. BORN
(1926):

*„Die Theorie liefert viel, aber
dem Geheimnis des Alten bringt
sie uns nicht näher. Jedenfalls
bin ich überzeugt, dass der nicht
würfelt.“*

Eine realistische Interpretation der Quantenmechanik

Deutung der Quantenmechanik durch verborgene Variable

DAVID BOHM (1917 – 1992) seit 1952.

Ausgangspunkt:

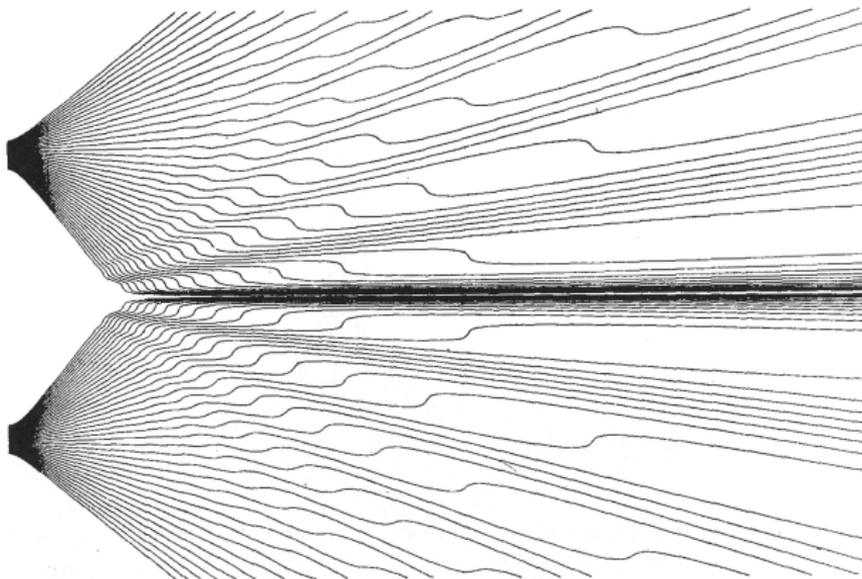
SCHRÖDINGERGleichung $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$ für freie Teilchen

Ansatz: $\psi = R \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$ (Wellenfunktion, Wahrsch.amplitude)

Es ergibt sich „Quantenpotential“ („Gespensterfeld“) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$

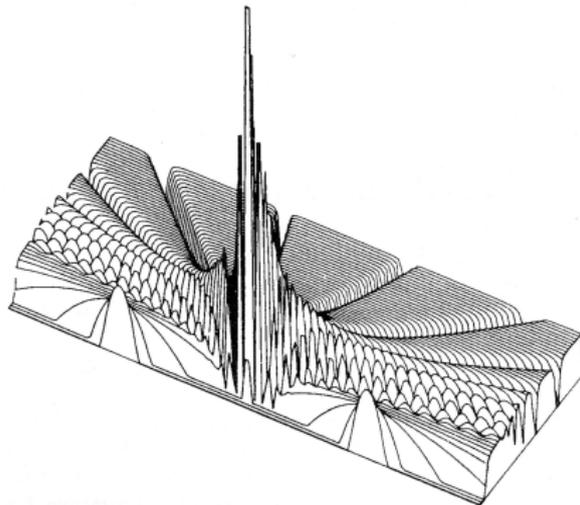
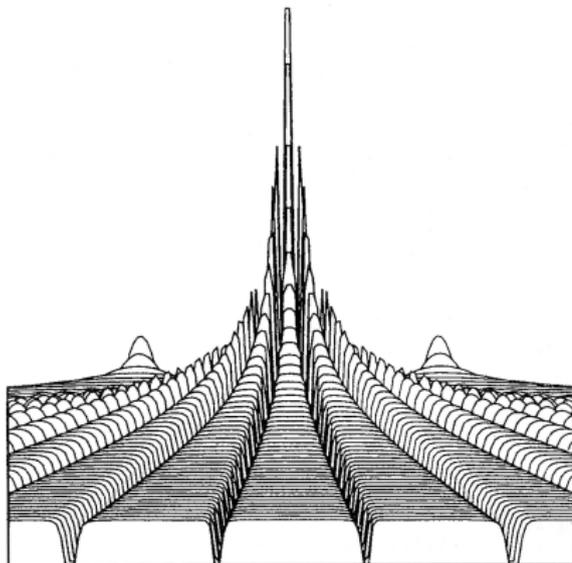
verborgene Variable: Teilchenorte

Gibt es doch Bahnen?



Elektronen am Doppelspalt (nach BOHM)

Das BOHM'sche Quantenpotential



(vgl. J. BAGGOTT: beyond measure. p. 212ff. Oxford University Press 2004)

Eine realistische Interpretation der Quantenmechanik

● Charakteristika/Erfolge der BOHM'schen Deutung:

- „Teilchen“ mit Bahnen (Doppelspalt-Experiment); Determinismus + klassische Statistik!
- Quantenpotential nichtlokal; evtl. anwachsend für große Teilchenabstände
- Zufall im Sinne der Ignoranzinterpretation
- kein Kollaps der Wellenfunktion

● Probleme der BOHM'schen Deutung:

- Quantenpotential widerspricht „Geist“ der Relativitätstheorie
- asymmetrische Wechselwirkung Quantenpotential \Rightarrow Teilchen
- bisher keine befriedigende relativistische Verallgemeinerung (analog DIRAC-Gleichung)
- Wahrscheinlichkeiten nur für *Orte* gleich wie in der konventionellen Deutung
- Impuls 0 im Grundzustand des H-Atoms (Widerspruch Unbestimmtheitsrelation)

Eine realistische Interpretation der Quantenmechanik

Wissenschaftstheoretische Bedeutung:

Quantentheorie offenbar Beispiel für eine „unterbestimmte“ Theorie:
unterschiedliche Deutungen sind möglich!

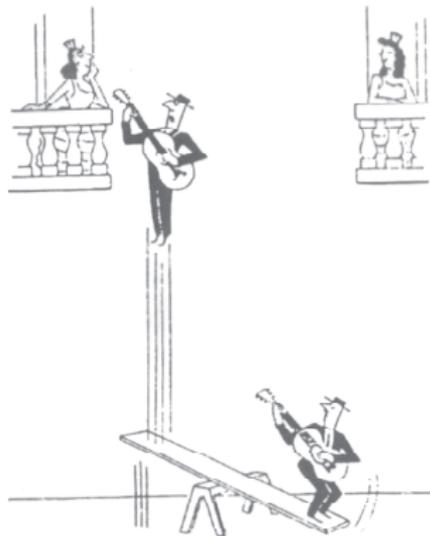
Konsequenz:

Vorsicht vor dogmatischen Interpretationen!

- 1 Naturgesetz und Kausalität
 - Gesetze in der klassischen Physik
- 2 Zufall in der klassischen Physik
 - Kinetische Gastheorie
 - Deterministisches Chaos
- 3 Zufall in der Quantenphysik
 - Indeterminismus am Doppelspalt
 - Buridans Esel
 - Die BOHM'sche Deutung
- 4 Die heutige Sicht von Naturgesetz und Zufall

- **Zufällige Einzelprozesse im Mikroskopischen**
mitteln sich oft aus; aber auch:
- **Zufällige Prozesse im Mikroskopischen schlagen durch ins Makroskopische (unsere Lebenswelt)**
 - Nebelkammer-Spuren von Teilchenbahnen
 - Kristallbildung aus übersättigter Lösung (z. B. Honig)
 - Rissbildung in Metallen
Bahnen der Splitter eines platzenden Geschosses
 - ionisierende Strahlung
somatische Mutation, Tumorbildung
- **Teilweise zufällige Prozesse wegen empfindlicher Anfangsbedingungen (Chaos)**

Naturgesetze



Energieerhaltung

- **Erhaltungssätze** (Energieerhaltung, Ladungserhaltung, Parität, ...)
Sie kanalisieren das Zufallsgeschehen.
- **Quasideterministische Gesetze**
(Durchschnittsgesetze)
Viel unabhängiges Zufallsgeschehen wird berechenbar!
Beispiel: Materialgesetze

Warum kann es keinen LAPLACE'schen Dämon geben?

- Er müsste alle Naturgesetze zuverlässig kennen. *Endliches* Erfahrungswissen reicht dazu nicht aus (Induktionsproblem, HUME, POPPER).
- Falls es eine Weltformel gibt (TOE), kann er ihre Widerspruchsfreiheit nicht wissen (GÖDEL).
- Er müsste nicht-physikalische Messverfahren haben, da seine messende Kenntnisnahme den Zustand der Welt verändert.
- Er kommt in Paradoxien der Selbstbezüglichkeit, da er sich selbst und sein Rechnen vorausberechnen können müsste.

Warum kann es keinen LAPLACE'schen Dämon geben?

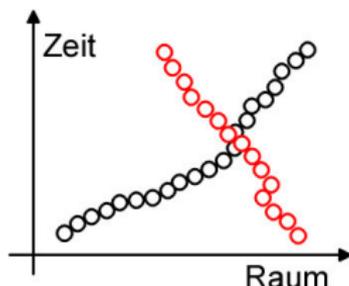
Außerdem:

- Wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit existiert ein kosmischer „Horizont“. Er kann also nicht alle Zustände des Universums kennen (Relativitätstheorie).
- Anfangsbedingungen sind prinzipiell nicht genau bestimmt und können deshalb nicht genau gewusst werden (Quantentheorie, Unbestimmtheitsrelation).
- Die Berechnung chaotischer Systeme müsste so präzise sein, dass die Rechendauer mit dem Weltalter vergleichbar wird. *Vorausberechnungen werden damit unmöglich (Chaostheorie).*

Arten von Zufällen (nach R. VAAS)

1. Der essentielle Zufall

Koinzidenz voneinander unabhängiger Kausalketten
unwahrscheinlich, überraschend



Beispiele:

Autounfall,

überraschendes Zusammentreffen,

Astronom entdeckt Supernova

2. Der operationelle Zufall

Praktische Unvorhersagbarkeit von Ereignissen, auch bei
angenommener vollständiger Determiniertheit
(Ignoranzinterpretation, deterministisches Chaos)

Danke!

Herzlichen Dank
den Herren

G. BRACKENHOFER und R. KELLER
(Vorlesungssammlung Physik)

für die Bereitstellung von Experimenten!

Teil II

Ergänzendes Material

Komplementarität *ohne* Unbestimmtheitsrelation Doppelspaltexperiment von REMPE et al. (1998)

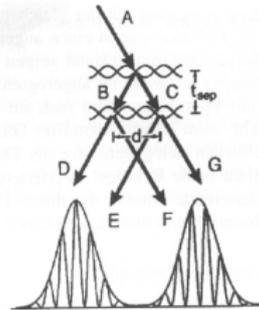
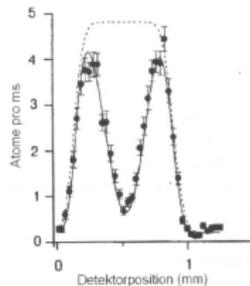
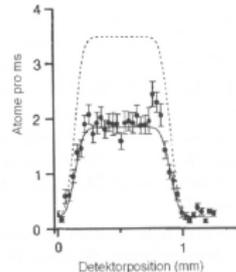


Abb. 7.8: Schema des Experiments von Dürr, Nonn und Rempe

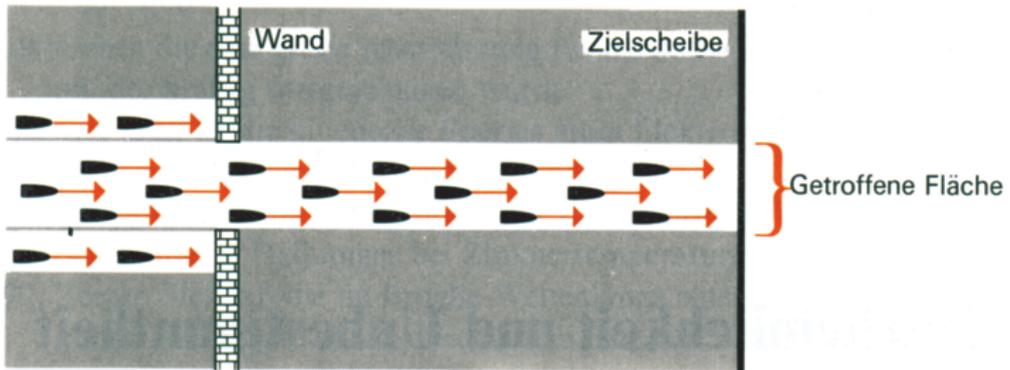
(a)



(b)

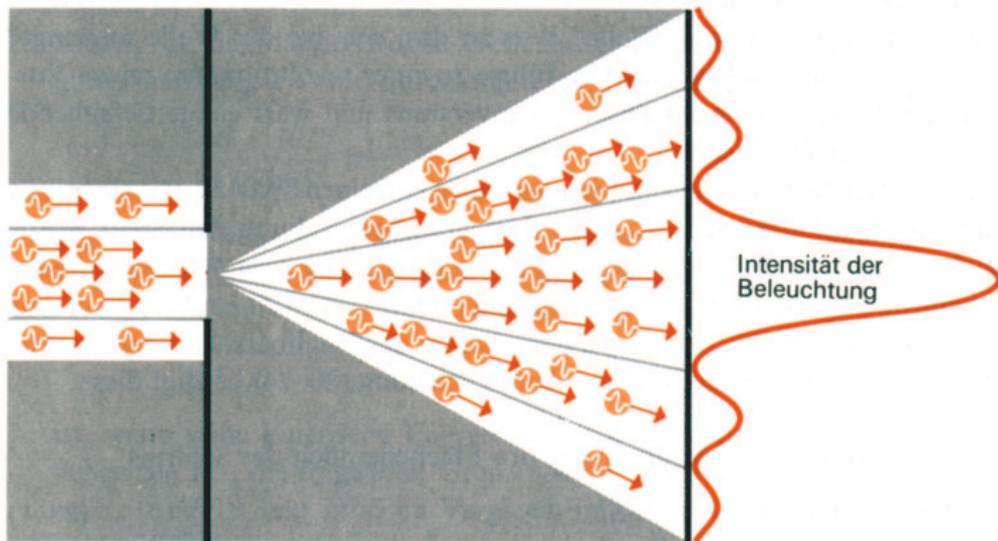


Determinierte Ereignisse



Flug makroskopischer Teilchen durch eine Öffnung

Indeterminierte Ereignisse



Flug mikroskopischer „Teilchen“ durch eine Öffnung

Tausend Ziffern: Eine Zufallsfolge?

1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445
923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938
446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229
489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091
456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063
155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204
665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117
931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298
336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392
171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713
427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796
892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187
07211349999983729780499510597317328160963185950244594553469083
026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083
814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937
51957781857780532171226806613001927876611195909216420198

Tausend Ziffern: Eine Zufallsfolge?

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445
923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938
446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229
489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091
456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063
155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204
665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117
931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298
336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392
171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713
427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796
892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187
07211349999983729780499510597317328160963185950244594553469083
026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083
814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937
51957781857780532171226806613001927876611195909216420198

Quantenchaos

