

**Grundlagen der Physik II Sommersemester 2005**  
**Blatt 12 Besprechung am 27. und 30. Juni**

1. Die mittlere Energie  $\bar{E}$  eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators beträgt  $\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}$ . Zur Vorbereitung der Herleitung berechnen Sie die Reihe  $S := \sum_{n=0}^{\infty} nq^n$  indem sie a) zeigen, dass  $S = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  gilt, wobei Sie natürlich  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  berechnen können, und b) indem Sie die Reihe folgendermaßen umsortieren:

$$S = \begin{array}{cccccc} q^1 + & q^2 + & q^3 + & q^4 + & q^5 + & \dots \\ & + & q^2 + & q^3 + & q^4 + & \dots \\ & & + & q^3 + & q^4 + & \dots \\ & & & + & q^4 + & \dots \\ & & & & + & \dots \\ & & & & & \ddots \end{array}, \quad \text{wobei Sie natürlich den Wert der Reihe in jeder Zeile berechnen können.}$$

2. Zeigen Sie nun, dass  $\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n f_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\beta n\hbar\omega}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}$  gilt, wobei  $\beta := \frac{1}{k_B T}$  ist. Zeigen Sie

weiterhin, dass im klassischen Grenzfall  $\beta\hbar\omega \ll 1$   $\bar{E} \rightarrow 1/\beta$ , und im quantenmechanischen Grenzfall  $\beta\hbar\omega \gg 1$   $\bar{E} \rightarrow \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}$  gilt. Zeichnen Sie ein  $\beta\bar{E}, \beta\hbar\omega$ -Diagramm, und vergleichen Sie den klassischen Grenzwert  $\bar{E} = 1/\beta = k_B T$  mit ihrem Wissen aus der kinetischen Gastheorie.

3. Bei welcher Temperatur wird die Schwingung eines Federpendels mit Masse  $m = 1$  kg und Federkonstante  $D = 1$  N/m „aufgetaut“, wenn aufgetaut bedeutet, dass diese Schwingung mit 99% Wahrscheinlichkeit angeregt sein soll? Wie hoch ist anders herum die Eigenfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  der Vibration eines  $H_2$  Moleküls, wenn diese Schwingung erst bei  $T = 8425$  K aufgetaut ist?
4. Berechnen Sie die *mittlere freie Weglänge*  $l$  (d.h. die Strecke, die ein Gasmolekül zwischen zwei Stößen zurücklegt) indem Sie annehmen, daß ein schnelles Gasmolekül in ein Gas aus identischen Gasmolekülen eingeschossen wird, wobei die anderen Gasmoleküle sich nicht bewegen sollen. Welche Beziehung besteht zwischen der mittleren freien Weglänge  $l$  und dem Molekülabstand  $d$ ?
5. Wie hängt die mittlere freie Weglänge von dem Gasdruck ab? Ab welchem Druck stoßen die Gasmoleküle nicht mehr untereinander, sondern nur noch mit den Gefäßwänden?
6. Ab welcher Höhe über dem Erdboden können Gasmoleküle „ungestoßen“ ins All fliegen, wenn sie eine genügend hohe Geschwindigkeit (welche?) besitzen.
7. Ermitteln Sie mit Hilfe der Phasenregel, durch wie viele voneinander unabhängige Zustandsgrößen der Gleichgewichtszustand folgender Systeme bestimmt wird:
- Wasser mit gesättigtem Dampf,
  - Kochsalzlösung ( $H_2O + NaCl$ ) mit gesättigtem Dampf,
  - Ein System aus  $CaCO_3$ ,  $CaO$  und  $CO_2$  so zusammengesetzt, daß die Reaktion  $CaCO_3 \leftrightarrow CaO + CO_2$  in beiden Richtungen ablaufen kann.
8. Schauen Sie das vollständige Zustandsdiagramm (in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Volumen) von  $CO_2$  auf der Vorlesungshomepage nach und diskutieren Sie es (Zustandskurven, Koexistenzgebiete, Phasenübergänge...).
9. Betrachten Sie das Differential  $\vec{F} \cdot d\vec{x} = (x^2 - y)dx + xdy$ . Ist es ein vollständiges Differential? Berechnen Sie die Kurvenintegrale  $\int_{\gamma_i} \vec{F} d\vec{x}$  längs der Wege  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (siehe Skizze).
10. Gegeben ist ein ideales einatomiges Gas der Temperatur  $T_0 = 300K$ , des Druckes  $p_0 = 1bar$  und des Volumens  $V_0 = 24l$ .
- Das Gas werde isotherm auf das Volumen  $V_1 = 1l$  komprimiert. Wie hoch ist der Druck  $p_1$  des Gases nach der Kompression und welche Arbeit musste zur Kompression aufgewendet werden?
  - Nun werde dasselbe Gas ausgehend von  $p_0, T_0, V_0$  zunächst isobar auf  $V' = 1l$  komprimiert und danach isochor auf erwärmt. Welche Temperatur  $T'$  besitzt das Gas nach der Kompression auf  $V'$  und welche Arbeit musste zur Kompression aufgewendet werden?
  - Zeichnen Sie das  $pV$ -Diagramm beider Prozesse aus Aufgabe 9. in ein Schaubild.
  - Wie ändert sich die innere Energie und welche Wärme- und Arbeitsmengen werden bei dem Prozess in a) bzw. in b) zwischen  $p_0, T_0, V_0$  und  $p_1, T_0, V_1$  umgesetzt? Welche der Größen  $U, Q, W$  sind also keine Zustandsgrößen?