Systeme von Differentialgleichungen

Wir betrachten

$$\dot{y}(t) = A \cdot y(t)$$

mit einer Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ und einem Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Bestimmung eines Fundamentalsystems

Wie bestimmt man ein Fundamentalsystem dieses Differentialgleichungssystems (also eine Basis des Lösungsraumes)? Hier ein „Kochrezept“:

1. Bestimme die Eigenwerte von A.

2. Fallunterscheidung:

   (a) λ EW von A, v zugehörigem EV
   $\Longrightarrow \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$ ist Lösung

   (b) λ EW von A, $v_1, \ldots, v_m$ zugehörige EV
   $\Longrightarrow \mathrm{e}^{\lambda t}\, v_1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda t}\, v_m$ sind Lösungen

   (c) λ ist m-facher EW von A, es gibt jedoch nur einen EV v_1
   $\Longrightarrow$ Bestimme die Hauptvektoren wie folgt:

   - Löse: $(A - \lambda E_n)\mathbf{v_2} = v_1$
   - Löse: $(A - \lambda E_n)\mathbf{v_3} = v_2$

     $\vdots$
   - Löse: $(A - \lambda E_n)\mathbf{v_m} = v_{m-1}$

   $\Longrightarrow \mathrm{e}^{\lambda t}\, v_1, \mathrm{e}^{\lambda t}(v_2 + tv_1), \mathrm{e}^{\lambda t}(v_3 + tv_2 + t^2 v_1), \ldots, \mathrm{e}^{\lambda t}(v_m + tv_{m-1} + \ldots + t^{m-1} v_1)$ sind Lösungen.

   (d) $\lambda_1 = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$ ist EW von A mit zugehörigem EV $v_1 = a + b\,\mathrm{i}$.
   $\Longrightarrow$ Dann ist auch $\lambda_2 := \alpha - \beta\,\mathrm{i}$ EW von A mit zugehörigem EV $v_2 := a - b\,\mathrm{i}$.
   Dies sieht man wie folgt ein:

   $$Av = \lambda v \Leftrightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Leftrightarrow A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Wir haben hier verwendet, dass A reell-wertig ist.
Die Lösungen sind gegeben durch

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)a - \sin(\beta t)b\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)a + \cos(\beta t)b\right).$$

Beispiel: Entkoppeln eines DGL-Systems

Bestimme ein reelles Fundamentalsystem von

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 3y_3 \\ \dot{y}_2(t) = 8y_4 - 6y_2 \\ \dot{y}_3(t) = -3y_1 \\ \dot{y}_4(t) = 6y_4 - 4y_2. \end{cases}$$

Schauen wir uns das System genau an, merken wir, dass es in zwei Systeme mit jeweils zwei Unbekannten entkoppelt, nämlich

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 3y_3 \\ \dot{y}_3(t) = -3y_1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dot{y}_2(t) = 8y_4 - 6y_2 \\ \dot{y}_4(t) = 6y_4 - 4y_2. \end{cases}$$

Unsere Idee ist nun beide Systeme einzeln zu lösen.

Betrachten wir zunächst das Erste. Dieses ist von der Form $\dot{\widetilde{y}} = A\widetilde{y}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

und dem Vektor $\widetilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A bestimmt sich zu

$$\mathrm{c}(A, \lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 9,$$

also erhalten wir als Eigenwerte $\lambda_1 = 3\,\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -3\,\mathrm{i}$.

Bestimmen wir nun den Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 3\,\mathrm{i}$: Wir lösen dazu

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 E_2)v_1 = \mathbf{o} &\iff \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{i} & 3 \\ -3 & -3\,\mathrm{i} \end{pmatrix} v_1 = \mathbf{o} \\ &\overset{\text{(MZ)}}{\iff} \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} v_1 = \mathbf{o} \\ &\iff v_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle =: V_1.\end{aligned}$$

Eine Basis von V_1 ist bspw. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Wir schreiben $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus Symmetriegründen erhalten wir den Eigenvektor v_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = -3\,\mathrm{i}$ unmittelbar: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Wir schreiben $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit erhalten wir die Lösungen

$$\widetilde{y}^{(1)}(t) = \cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\widetilde{y}^{(2)}(t) = \sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das zweite System ist von der Gestalt $\dot{\widehat{y}} = B\widehat{y}$ mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

und dem Vektor $\widehat{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von B bestimmt sich zu

$$\begin{aligned}\mathrm{c}(B, \mu) = \det(B - \mu E_2) &= \det \begin{pmatrix} -6-\mu & 8 \\ -4 & 6-\mu \end{pmatrix} \\ &= (-6-\mu)(6-\mu) + 32 \\ &= -36 + 6\mu - 6\mu + \mu^2 + 32 \\ &= \mu^2 - 4,\end{aligned}$$

also erhalten wir als Eigenwerte $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = -2$.

Wie oben bestimmt man die korrespondierenden Eigenvektoren bspw. zu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir hier als Lösungen

$$\widetilde{y}^{(3)}(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\widetilde{y}^{(4)}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir schließlich

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} & 2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ -\sin(3t) & \cos(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: DGL-System 2. Ordnung

Man berechne alle reellen Lösungen des DGL-Systems

$$\begin{cases} y_1''(t) = -2y_1(t) + 2y_1'(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t) - y_1'(t). \end{cases}$$

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung zunächst in eine System um, indem wir

$$y_3(t) := -y_1'(t)$$

setzen. Wir erhalten wegen $y_3'(t) = -y_1''(t) = 2y_1(t) - 2y_1'(t) = 2y_1(t) + 2y_3(t)$ somit

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_3(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_1(t) + 2y_3(t). \end{cases}$$

Dies ist von der Form $y' = Ay$ für $y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A bestimmt sich mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (entwickeln nach 2. Spalte) zu

$$\begin{aligned} \mathrm{c}(A, \lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\big((-\lambda)(2-\lambda) + 2\big) \\ &\overset{(\star)}{=} (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (3-\lambda)(\lambda - 1 + \mathrm{i})(\lambda - 1 - \mathrm{i}). \end{aligned}$$

Wir haben dabei an der Stelle $(\star)$ tunlichst darauf geachtet, dass wir *nicht* ausmultiplizieren! Die Eigenwerte können wir so direkt ablesen (und müssen nicht erst Nullstellen eines Polynomes dritten Grades raten und anschließende Polynomdivision durchführen) – sie ergeben sich zu: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$, und $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$.

Berechnen wir also die zugehörigen Eigenvektoren:

- Den Eigenraum zum Eigenwert 3 erhält man durch scharfes Hinschauen zu

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

  Als Basis und Eigenvektor wählen wir $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Um den zum Eigenwert $1 + \mathrm{i}$ korrespondierenden Eigenvektor zu bestimmen, lösen wir

$$\big(A-(1+\mathrm{i})E_3\big)\,v_2=\mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} -(1+\mathrm{i}) & 0 & -1 \\ 1 & 2-\mathrm{i} & 1 \\ 2 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} v_2=\mathbf{o}$$

$$\overset{(MZ)}{\iff} \begin{pmatrix} -(1+\mathrm{i}) & 0 & -1 \\ 1 & 2-\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} v_2=\mathbf{o}$$

$$\overset{(Gauß)}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 3+\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} v_2=\mathbf{o}$$

$$\overset{ZII\cdot(-\mathrm{i})}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1+3\,\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} v_2=\mathbf{o}$$

Dabei haben wir bei (Gauß) einen Zeilentausch durchgeführt und das $(1+\mathrm{i})$-fache der oberen auf die untere Zeile addiert. Wir wählen

$$v_2 := \begin{pmatrix} -1-2\,\mathrm{i} \\ 1 \\ -1+3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

- Mit einem Symmetrieargument erhält man sofort

$$v_3 := \begin{pmatrix} -1+2\,\mathrm{i} \\ 1 \\ -1-3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

  als Eigenvektor für λ_3.

Somit erhalten wir als Lösung

$$y(t)=a\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+b\,\mathrm{e}^{t}\left[\cos t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\right]+c\,\mathrm{e}^{t}\left[\sin t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\cos t\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\right]$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -b\,\mathrm{e}^t\cos t+2b\,\mathrm{e}^t\sin t-c\,\mathrm{e}^t\sin t-2c\,\mathrm{e}^t\cos t \\ &= (-b-2c)\,\mathrm{e}^t\cos t+(2b-c)\,\mathrm{e}^t\sin t \end{aligned}$$

und

$$y_2(t) = a\,\mathrm{e}^{3t} + b\,\mathrm{e}^t \cos t + c\,\mathrm{e}^t \sin t.$$

Weiter sieht man

$$\begin{aligned} y_3(t) &= -b\,\mathrm{e}^t \cos t - 3b\,\mathrm{e}^t \sin t - c\,\mathrm{e}^t \sin t + 3c\,\mathrm{e}^t \cos t \\ &= (-b+3c)\,\mathrm{e}^t \cos t + (-3b-c)\,\mathrm{e}^t \sin t, \end{aligned}$$

womit man (unter Anwendung einiger Produktregeln) in der Tat $y_1' = -y_3$ verifizieren kann.

Beispiel: Matrixexponential

Gebe ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{:=A} y(t).$$

Unsere Idee ist e^{tA} zu berechnen, da die Matrix A eine günstige Form hat (vgl. Numerik I). Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{:=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=N}.$$

Wir stellen fest, dass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt und somit

$$N^3 = N^4 = \ldots = 0$$

gilt (man sagt auch, dass N nilpotent ist – dadurch erklärt sich die Wahl des Buchstabens). Somit ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tD}\,\mathrm{e}^{tN} &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \left(E_3 + tN + \frac{1}{2} t^2 N^2 \right) \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\,\mathrm{e}^{3t} & \frac{1}{2} t^2\,\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ein Fundamentalsystem.