Maximalität und Globalität von Lösungen

1 Maximale Lösungen

Sei $\Omega :\simeq T \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, u_0) \in \Omega$. Im Folgenden betrachten wir das

$$(\mathsf{AWP}) \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, y(t)) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Definition 1.1. Eine Funktion $u \colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ heißt *maximale Lösung* des (AWP)s, falls u eine Lösung des (AWP)s ist und jede andere Lösung v des (AWP)s lediglich eine Einschränkung von u auf ein kleineres Intervall $I \subset I_{\max}$ ist.
M.a.W. kann man u also nicht mehr fortsetzen.

Erinnerung 1.2 (Zusatzinfo 5.5 aus der Vorlesung)**.** Ist f zustätzlich Lipschitz-stetig in der 2. Komponente, so garantiert der *Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf*, dass man ein beliebiges Kompaktum $K :\simeq K_1 \times K_2 \subset T \times U = \Omega$ mit $(t_0, u_0) \in K$ wählen kann, und eine eindeutige Lösung $u \colon I \to \mathbb{R}^n$ auf einem beliebig großen kompakten Intervall $I \subset K_1$ mit $t_0 \in I$ erhält.
Das bemerkenswerte daran ist, dass das Kompaktum beliebig gewählt werden kann, es muss lediglich den Anfangswert enthalten.

Man hat allerdings nicht immer Lipschitz-Stetigkeit in der 2. Komponente von f vorliegen.

Satz 1.3 (Satz 6.1 aus der Vorlesung)**.** *Ist der rechte Endpunkt t^+ des maximalen Lösungsintervalls kleiner als $+\infty$, verlässt der Graph $(t, u(t))$ der Lösung jedes Kompaktum $K \subset \Omega$, sobald $t \uparrow t^+$ geht.*
Analoges gilt für den linken Endpunkt t^-.

Theorem 1.4 (Korollar 6.2 aus der Vorlesung)**.** *Es treten drei mögliche Fälle auf (Analoges gilt wieder für t^-):*

1. $t^+ = +\infty$
2. $t^+ < +\infty$ *und es existiert eine Folge* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ *mit* $t_n \uparrow t^+$, *sodass*
$$\operatorname{dist}\left((t_n, u(t_n)), \partial\Omega\right) \to 0.$$
3. $t^+ < +\infty$ *und es existiert eine Zeit* $t_1 < t^+$ *und ein* $\varepsilon > 0$, *sodass*
$$\operatorname{dist}\left((t, u(t)), \partial\Omega\right) \geq \varepsilon > 0$$
für alle $t \geq t_1$ *aber* $\lim_{t\uparrow t^+} \|u(t)\| = +\infty$ *gilt. In diesem Fall ist die Lösung offensichtlich nicht stetig fortsetzbar.*

Beispiel 1.5. Bestimme eine maximale Lösung des

$$\text{(AWP)} \begin{cases} \dot{u}(t) = u(t)^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Schritt 1: Typ der DGL erkennen & lösen.
Die DGL ist vom Typ der „getrennten Veränderlichen“. Es ist nämlich

$$\dot{u}(t) \cdot u(t)^{-\frac{2}{3}} = 1.$$

Diese Umformung ist gültig für $u(t) \neq 0$, was wegen dem Anfangswert zumindest lokal um den Zeitpunkt 0 gültig ist.

Integration von 0 bis t liefert

$$\int_0^t \dot{u}(s) \cdot u(s)^{-\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}s = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s.$$

Mit der Substitutionsregel $\int_a^b f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \, \mathrm{d}s = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x$ und den Identifikationen $\varphi \equiv u$ sowei $f \equiv (\ \cdot\ )^{-\frac{2}{3}}$ folgt

$$\int_{u(0)}^{u(t)} x^{-\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}x = t$$

und somit

$$3x^{\frac{1}{3}} \Big|_{u(0)}^{u(t)} = 3u(t)^{\frac{1}{3}} - 3 = t.$$

Umgeformt erhält man

$$u(t) = \frac{1}{27}(t+3)^3.$$

Man sieht sofort (z.B. durch direktes Nachrechnen), dass dieses Ergebnis das (AWP) löst, wir haben also in der Tat einen *Lösungskandidaten* gefunden.

Schritt 2: Lösungsintervall bestimmen.
Die Lösung ist verschieden von Null im Intervall $I := (-3, +\infty)$.

Schritt 3: Begründen, dass wir tatsächlich eine Lösung haben.
In diesem Intervall sind die obigen Umformungen gerechtfertigt, d.h. die Lösung ist auch eine.

Schritt 4: Prüfen, ob die Lösung fortsetzbar ist.
Die bisherige Lösung ist *nicht* maximal, da $\lim_{t \downarrow -3} \left\| \frac{1}{27}(t+3)^3 \right\| = 0 \neq +\infty$ ist.

Im Intervall $(-\infty, -3]$ müssen wir keinen Anfangswert mehr berücksichtigen, d.h. die triviale Lösung $u \equiv 0$ ist auf diesem Intervall eine Lösung der DGL.

Der linksseitige Grenzwert der neuen Lösung stimmt mit dem rechtsseitigen Grenzwert der alten überein:

$$\lim_{t \uparrow -3} \|\mathfrak{o}(t)\| = 0 = \lim_{t \downarrow -3} \left\| \frac{1}{27}(t+3)^3 \right\| .$$

Somit ist nach „Zusammenkleben der Lösungen" gemäß Blatt 1/A4 auch

$$u(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \in (-\infty, -3] \\ \frac{1}{27}(t+3)^3, & \text{für } t \in (-3, +\infty) \end{cases} .$$

eine Lösung des (AWP).

Schritt 5: Maximalität des Lösungsintervalls.
Da die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist sie maximal.

Beispiel 1.6. Bestimme eine maximale Lösung des

$$\text{(AWP)}\begin{cases} \dot{u}(t) = u(t)^3 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Es folgt eine *viel zu kurze* Lösungsskizze!

- Trennen der Veränderlichen liefert

$$\dot{u}(t) \cdot u(t)^{-3} = 1$$

  für $u(t) \neq 0$, was lokal um den Zeitpunkt 0 gerechtfertigt ist. Integration und anschließende Substitution liefert dann

$$\int_{u(0)}^{u(t)} x^{-3} \, \mathrm{d}x = t,$$

  also $-\frac{1}{2}u(t)^{-2} + \frac{1}{2} = t$. Wir erhalten als *Lösungskandidaten* $u(t) = (-2t+1)^{-\frac{1}{2}}$.

- $I := (-\infty, \frac{1}{2})$.
- Dies ist eine Lösung: klar!
- $\lim_{t \uparrow \frac{1}{2}} \|u(t)\| = +\infty$, also existiert *keine* stetige Fortsetzung nach rechts, daher ist I maximal.

2 Globale Lösungen

Wir geben nun ein Kriterium an, dass die Globalität einer gefundenen Lösung impliziert:

Satz 2.1. *Seien $\alpha, \beta \colon [t_0, b) \to \mathbb{R}^+$ stetig, sodass*

$$|f(t,x)| \leq \alpha(t) + \beta(t) \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$$

für alle $t \in [t_0, b)$ gilt. Dann ist $t^+ = \infty$. Analoges gilt für t^-.

Beispiel 2.2. Besitzt das folgende (AWP1) eine Lösung $y \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$?

$$\text{(AWP1)} \begin{cases} \dot{y}(t) = y(t)^4 + (\pi + \sin(t))y(t) + (\tanh(t) + 1)t \\ y(0) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

Die lokale Existenz der Lösung ergibt sich aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

Schritt 1: $y(t) \geq 0$.

Wir verwenden ein *wichtiges Standardargument*: Angenommen es gäbe ein $t \geq 0$ mit $y(t) < 1$, dann finden wir auch eine Zeit $t_0 > 0$ mit $y(t_0) = 0$ aber $\dot{y}(t_0) \leq 0$. Man kann nämlich z.B.

$$t_0 := \inf\{t > 0 \mid y(t) < 1\}$$

wählen. Durch Einsetzen dieser Tatsachen in die (DGL1) erhält man

$$\dot{y}(t_0) = (\tanh(t) + 1) \cdot t_0 > 0,$$

ein Widerspruch!

Schritt 2: $y(t) \geq z(t)$, solange beide Lösungen definiert sind.

Es sei hierbei $z(t)$ die Lösung von

$$\text{(AWP2)} \begin{cases} \dot{z}(t) = z(t)^4 \\ z(0) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

Wäre nämlich $y(t) < z(t)$ für ein $t \geq 0$, wo beide Lösungen definiert sind, dann finden wir gemäß unseres *Standardarguments* auch ein $t_0 \geq 0$ mit $y(t_0) = z(t_0)$ aber $\dot{y}(t_0) \leq \dot{z}(t_0)$.

Wir unterscheiden nun beim Einsetzen in die (DGL1) zwei Fälle:

Fall 1: $t_0 = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_0) &= y(t_0)^4 + (\pi + \underbrace{\sin(0)}_{=0}) \cdot \underbrace{y(0)}_{=\mathrm{e}} + \underbrace{(\tanh(0) + 1) \cdot 0}_{=0} \\ &= y(t_0)^4 + \pi\,\mathrm{e} \\ &> y(t_0)^4 = z(t_0)^4 = \dot{z}(t_0). \end{aligned}$$

Ein Widerspruch!

Fall 2: $t_0 > 0$. Mit $\|\sin(\cdot)\|_\infty = \|\tanh(\cdot)\|_\infty = 1$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\dot y(t_0) &= y(t_0)^4 + \underbrace{\underbrace{(\pi + \sin(t_0))}_{>0} \cdot \underbrace{y(t_0)}_{\geq 0 \text{ wg. S1}} + \underbrace{(\tanh(t_0) + 1)}_{>0} \cdot \underbrace{t_0}_{>0}}_{>0} \\ &> y(t_0)^4 = z(t_0)^4 = \dot z(t_0).\end{aligned}$$

Erneut ein Widerspruch!

Aus den Widersprüchen in beiden möglichen Fällen schließen wir die Behauptung.

Schritt 3: Löse (AWP2).

Wir wollen zunächst (DGL2) lösen. Durch scharfes Hinschauen (mit ein bisschen Rumprobieren) erhalten wir die Idee für den *Ansatz* (alternativ trennt man die Veränderlichen und integriert):

$$z(t) = \frac{1}{c_1 (c_2 - t)^{\frac{1}{3}}}$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}^\star$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\dot z(t) &= \frac{1}{c_1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (c_2 - t)^{-\frac{4}{3}} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot (c_2 - t)^{-\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit $z(t)^4 = \left(\frac{1}{c_1}\right)^4 \cdot (c_2 - t)^{-\frac{4}{3}}$ liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{3c_1} &= \left(\frac{1}{c_1}\right)^4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &= \frac{c_1}{c_1^4} = \frac{1}{c_1^3},\end{aligned}$$

also $c_1 := \sqrt[3]{3}$. Zusätzlich bestimmen wir c_2 so, dass der Anfangswert erfüllt ist. Es soll gelten

$$z(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{c_2 - 0}} \stackrel{!}{=} \mathrm{e},$$

also $\sqrt[3]{c_2} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\mathrm{e}}$, weshalb wir $c_2 := \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\mathrm{e}}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{e}^3}$ wählen. Die Lösung ergibt sich somit zu

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{e}^3} - t}}.$$

Als Lösungsintervall wählen wir

$$I := [0, c_2) = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{e}^3}\right).$$

Schritt 4: Es gibt keine globale Lösung von (AWP1).

Es gilt $\lim_{t\uparrow c_2} \|z(t)\| = +\infty$. Daher haben wir im vorherigen Schritt eine maximale Lösung des (AWP2) bestimmt.
Folglich

(a) existiert die Lösung der (DGL1) entweder nicht auf dem ganzen Intervall I (weshalb es keine globale Lösung gäbe), *oder*

(b) es gilt $\lim_{t\uparrow c_2} \|y(t)\| = +\infty$. In diesem Fall kann die Lösung auch nicht über I fortgesetzt werden bzw. auf dem ganzen Intervall I definiert sein.

Wie auch immer: Die maximale Lösung des (AWP1) ist höchstens auf I definiert (das genaue Intervall ist unbekannt). Es gibt damit keine Lösung auf $[0, +\infty)$.