Dezimalsystem

b- adisches Stellenwertsystem zur Basis $b = 10$, d.h. Stelle bestimmt Wert der jeweiligen Ziffer.

Def. 1: b-adische Darstellung von reellen Zahlen

Sei $b \in \mathbb{N}$ (Zahlenbasis) und für jedes $k \in \mathbb{N}$ seien sog. Ziffern $d_k \in \{0, \dots, b-1\}$ gegeben und weiter sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann heißt durch die Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$(*) \quad x = m, d_1 d_2 d_3 \dots := m + \frac{d_1}{b^1} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \dots$$

$$= m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{b^k}$$

die sogenannte b-adische Darstellung von x.

Im Falle $b = 10$ heißt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$a_n := m + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

eine Dezimalbruchentwicklung.

Bem.

- Die Darstellung (*) ist wohldefiniert, d.h. die unendliche Reihe kann nicht beliebig groß werden
- Die b-adische Zahl einer rationalen Zahl ($\mathbb{Q}$) ist stets periodisch (bzw. bricht ab)

- Jede reelle Zahl lässt sich durch eine Dezimalbruchentwicklung/ b-adische Darstellung darstellen. Diese ist aber nicht eindeutig!

z.B. ist $x = 1 \begin{array}{l} \nearrow 1.\overline{0} \\ \searrow 0.\overline{9} \end{array}$, denn es ex. nach der Def. der Dezimalbruchentwicklung kein $x \in \mathbb{R}$ mit $0.\overline{9} < x < 1.\overline{0}$.

Alternativ:

$$0,\overline{9} = 0,9999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} \overset{\text{Index shift}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$\underset{\frac{1}{10} < 1}{\overset{\text{Geom. Reihe}}{=}} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1. \quad \boxtimes$$

- Eindeutigkeit in der Darstellung bekommt man, wenn man fordert, dass „ab einer bestimmten Stelle keine Ziffer mehr den Wert $b-1$ hat":

<u>Def. 2: Eigentliche b-adische Darstellung</u>

(*) heißt eigentlich, falls $\exists L \in \mathbb{N}$ mit $d_k \neq b-1 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq L$

<u>Bem.:</u>

Damit werden Fälle wie $x = 1,23\overline{9}$ vermieden und mit der alternativen Darstellung $x = 1,24$ gearbeitet.

<u>Def. 3: Gauss-Klammer:</u>

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

Bsp.: $\lfloor 0,125 \rfloor = 0$, $\lfloor 12,3 \rfloor = 12$, $\lfloor 13 \rfloor = 13$, $\lfloor 0.\overline{9} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor$!

Lemma: b-adische Entwicklg

Sei $x \in \mathbb{R}$, dann erhält man die b-adische Entwicklg im Fall $x > 0$ durch den Algorithmus

$$m := \lfloor x \rfloor, \qquad a_1 := \lfloor (x-m)\, b \rfloor$$

$$a_2 := \lfloor (x - m{,}a_1) \cdot b^2 \rfloor$$

$$a_3 := \lfloor (x - m{,}a_1 a_2) \cdot b^3 \rfloor$$

$$\vdots$$

Beweis:

Sei $x = m{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ eine eigentliche b-adische Darstellg und $m{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ unbekannt.

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor m{,}a_1 a_2 \ldots \rfloor = m$$

$$\lfloor (x-m) b \rfloor = \lfloor (0{,}a_1 a_2 \ldots)\, b \rfloor = \lfloor a_1{,}a_2 a_3 \ldots \rfloor = a_1$$

$$\lfloor (x - m{,}a_1) b^2 \rfloor = \lfloor (0{,}0 a_2 \ldots)\, b^2 \rfloor = \lfloor a_2{,}a_3 \ldots \rfloor = a_2$$

$$\vdots \qquad \square$$

Bsp: $b = 10$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \lfloor x \rfloor = \lfloor 1/3 \rfloor = 0$$

$$\lfloor (x-m) \cdot 10 \rfloor = \lfloor \tfrac{10}{3} \rfloor = \lfloor 3 + \tfrac{1}{3} \rfloor = 3 = a_1$$

$$\lfloor (x - 0{,}3) \cdot 10 \rfloor = \lfloor (\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{10}) \cdot 100 \rfloor = 3 = a_2$$

$$\vdots$$

Lemma & Def.

Jede Dezimalbruchentw. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist konvergent.

Den Grenzwert $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ bezeichnen wir mit $a = m{,}d_1 d_2 d_3 \ldots$