Lernziel TC 2012 / Woche 1

Mengenlehre und Intervalle

1. Definiere folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente oder durch eine kurze mathematische Beschreibung

   $\mathbb{N} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$
   $\mathbb{Z} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$
   $\mathbb{Q} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

2. Notiere mit beschreibender mathematischer Eigenschaft die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen $\mathcal{N}$

   $\mathcal{N} = \{1,3,5,7,9,11,13,\dots\} = \{ \qquad | \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

3. Ergänze folgende Definitionen zu beliebigen Mengen A und B:

   A und B heißen disjunkt, wenn ……………………………………………………………………………….

   Es gilt A=B, wenn ……………………………………………………………………………………………..

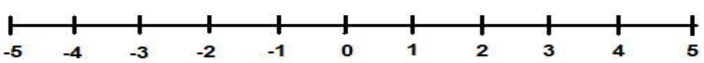
4. Ist T die Menge der Tiere im Kölner Zoo und R die Menge der Raubtiere im Kölner Zoo, dann gilt $R = \{ \quad \in \quad | \qquad\qquad\qquad \}$

5. Schreibe das kartesische Produkt $\mathbb{Q}^4 := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ als Menge von 4-Tupeln

6. Sei I das Intervall definiert als $I := [0,1)$. Bestimme I^C.

7. Schreibe als Menge
   $[3,5] \cap [-2,3] =$
   $[3,5] \cap (-2,3) =$

8. Skizziere auf dem Zahlenstrahl
   $\left((-\infty,0) \cup [1,\infty)\right)^C$



Anordnung auf $\mathbb{R}$

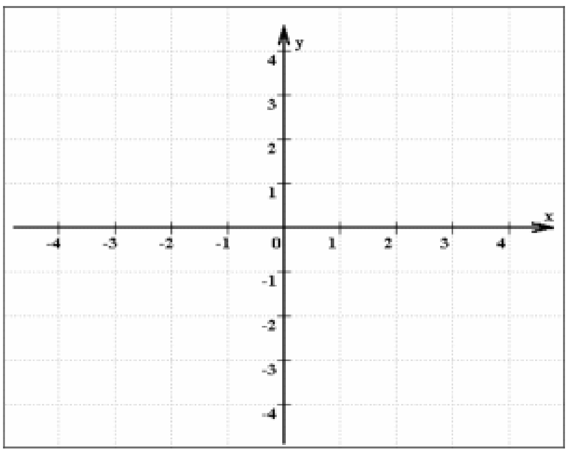
9. Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion $|\quad| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$|x| := \{$$

10. Zeige die „positive Definitheit“ des Absolutbetrages (d.h. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

11. Bestimme für welche $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|x - 3| \leq 2x + 3$ gilt.

12. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|x + 1| > 3$ lösen, indem du die beiden Funktionen auf der Zahlenebene skizzierst und die Lösungsmenge schraffierst.



13. Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Ungleichung gilt:

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

14. Entscheide die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

	wahr	falsch
Für je zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $r < s$ oder $r > s$, niemals jedoch beide gleichzeitig.		
Für Zahlen $r, s, t \in \mathbb{R}$ gelten folgende Implikationen/Äquivalenzen:		
$r < s$ oder $s < t \Rightarrow r < t$		
$r < s \Rightarrow r * t < s * t$		
$r > 0 \Leftrightarrow -r < 0$		

Elementare Funktionen & Rechnen

15. Vereinfache so weit wie möglich
    $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}} =$

    $\sqrt[8]{a^2 b * \sqrt[4]{b^{12}}} =$

16. Durch welches x wird $b^x = a$ für $a, b > 0, b \neq 1$ gelöst?

17. Warum gibt es keinen Logarithmus zur Basis $b = 1$?

18. Berechne
    $\log_2 32 =$
    $\log_{10} 100 =$

19. Nenne die Formel, um das Gradmaß ins Bogenmaß umzurechnen:

20. Nenne die „Mitternachtsformel“ (d.h. eine Formel, die die Lösungen einer allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ angibt)

21. Die Anzahl der Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hängt mit dem Wert der „Diskriminante“ $D = b^2 - 4ac$ zusammen. Untersuche die folgenden Fälle auf die Anzahl der Nullstellen:
    $D > 0$:
    $D = 0$:
    $D < 0$:

22. Es sei bekannt, dass $x_1 = 3$ eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ ist. Zerlege das Polynom vollständig in all seine Linearfaktoren und bestimme dadurch seine weiteren Nullstellen.

23. Stelle die Koordinatengleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M = (x_M, y_M) = (5,3)$ und Radius $r = 2$ auf.

24. Die Menge E_1 sei die Menge aller Punkte auf der Hülle der Einheitskugel. Beschreibe die Menge
$E_1 = \{ \qquad\qquad | \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

Beweistechnik & Aussagenlogik

25. Verneine die folgenden Aussagen:
A: „Das Schaf ist schwarz."
$\neg A$:
B: „Alle Schafe sind kurzsichtig."
$\neg B$:

26. Zeige mittels eines direkten Beweises (also durch logische Schlussfolgerungen ausgehend von der Annahme $\Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ dass die Schlussfolgerung richtig ist):

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n gerade, so ist auch n^2 gerade.

27. Was ist eine Primzahl?

Achtung! Kniffliger Beweis!

28. Zeige den „Satz von Euklid“ mittels eines Widerspruchsbeweises (d.h. man geht vom Gegenteil der Aussage aus, und führt diese Annahme zu einem Widerspruch):

„Es gibt unendlich viele Primzahlen“